



۱۴۵۶ پژوهشگاه بین‌المللی المصطفی

سرشناسه:	صفایی صادق، غلامرضا، ۱۳۲۶ -
عنوان و نام پدیدآور:	ریاضیات و کاربرد آن در اقتصاد/غلامرضا صفایی صادق .
مشخصات نشر:	قم : مرکز بین‌المللی ترجمه و نشر المصطفی، ۱۳۹۷.
مشخصات ظاهری:	۲۷۶ ص؛ وزیری
مرجع تولید:	پژوهشگاه بین‌المللی المصطفی
شابک:	۹۷۸-۶۰۰-۴۲۹-۴۵۲-۲
یادداشت:	چاپ دوم: ۱۳۹۸ (فیبیا).
وضعیت فهرست نویسی:	فیبیا
موضوع:	اقتصاد ریاضی
موضوع:	Economics, Mathematical
شناسه افزوده:	جامعة المصطفی العالمية . مرکز بین‌المللی ترجمه و نشر المصطفی
شناسه افزوده:	Almustafa International UniversityAlmustafa International Translation and Publication center
رده بندی کنگره:	HB۱۳۵/ص۷۹۹ ۱۳۹۷
رده بندی دیویی:	۳۳۰/۰۱۵۱۹۵
شماره کتابشناسی ملی:	۵۴۱۰۹۷۸

حق چاپ برای ناشر محفوظ است

ریاضیات و کاربرد آن در اقتصاد

مؤلف: غلامرضا صفایی صادق

چاپ دوم: ۱۳۹۸ اش / ۱۴۴۰ ق


ناشر: مرکز بین‌المللی ترجمه و نشر المصطفی

● چاپ: نازنجستان ● قیمت: ۳۸۰۰۰۰ ریال ● شمارگان: ۵۰۰ نسخه

مراکز پخش

◀ ایران، قم، خیابان معلم غربی (حجتیه)، نبش کوچه ۱۸؛
تلفن: ۰۲۵ ۳۷۸۳۹۳۰۵ / (داخلی ۱۰۵) +۹۸ ۲۵ ۳۷۸۳۶۱۳۴
◀ ایران، قم، بلوار محمدامین، سه راه سالاریه. تلفن: ۰۲۵- ۳۲۱۳۳۱۰۶

 <http://buy-pub.miu.ac.ir>

 @pub_almostafa

باسپاس از دست اندرکارانی که ما را در تولید این اثریاری رساندند.

■ ناظر گرافیک: مسعود مهدوی
■ ناظر چاپ: نعمت‌الله یزدانی
■ صفحه‌آرا: علی عبادی‌فرد

■ مدیر انتشارات: سید اباذر هاشمی هریکنندی
■ مدیر تولید: جعفر قاسمی ابهری
■ ناظر فنی: علی عبادی‌فرد

ریاضیات و کاربرد آن در اقتصاد

غلامرضا صفایی صادق



پژوهشگاه بین‌المللی
المصطفی

سخن ناشر

با پیروزی انقلاب شکوهمند اسلامی و در عصر جهانی شدن ارتباطات، پرسش‌ها و چالش‌های نوینی در حوزه علوم انسانی فراروی اندیشمندان مسلمان قرار گرفت که برخاسته از مسئولیت دشوار حکومت در این عصر است؛ دورانی که پای‌بندی به دین و سنت در مدیریت همه‌جانبه کشورها بسیار چالش‌برانگیز می‌نماید. از این رو مطالعات و پژوهش‌های به‌روز، جامع، منسجم و کاربردی در حوزه دین، بر اساس معیارهای معتبر جهانی و اندیشه‌های ناب و ژرف، بایسته و ضروری است و جلوگیری از انحرافات فکری و تربیتی پژوهندگان حوزه دین، مهم و مورد عنایت بنیان‌گذاران این شجره طیبه، به‌ویژه معمار بزرگ انقلاب اسلامی، امام خمینی علیه السلام و مقام معظم رهبری (دام ظلّه العالی) می‌باشد.

جهانی‌شدن و گسترش سلطه فرهنگی غرب در سایه رسانه‌های فرهنگی و ارتباطی اقتضا دارد که دانش پژوهان و علاقه‌مندان به این مباحث، با اندیشه‌های بلند و ارزش‌های متعالی آشنا شوند و این مهم با ایجاد رشته‌های تخصصی، تولید متون جدید و غنی، گسترش دامنه آموزش و تربیت سازمان‌یافته دانشجویان به سرانجام خواهد رسید. این فرایند گاه در پرداختن به مباحث بنیادین و تدوین متون تخصصی تعریف می‌شود و گاه در نگارش بحث‌های علمی، اما نه‌چندان پیچیده و تخصصی به ظهور می‌رسد.

بالندگی مراکز آموزشی در گرو نظام آموزشی منسجم، قانونمند و پویاست. بازنگری در متن‌ها و شیوه‌های آموزشی و پژوهشی و به‌روز کردن آنها نیز این انسجام و پویایی و در نتیجه نشاط علمی مراکز آموزشی و پژوهشی را در پی دارد.

«جامعة المصطفیٰ علیه السلام العالمیة» به عنوان بخشی از این مجموعه که رسالت بزرگ تعلیم و تربیت طلاب غیر ایرانی را بر عهده دارد، تألیف متون درسی مناسب را سرلوحه تلاش خود قرار داده و تدوین و نشر متون درسی در موضوعات گوناگون علوم دینی، حاصل این فرایند است.

مرکز بین‌المللی

ترجمه و نشر المصطفیٰ علیه السلام

پیش‌گفتار

حوزه‌های علمیه در تلاش خود در طول تاریخ، همواره تعلیم و تربیت را جزو رسالت‌های اصلی خود قرار داده و بدین وسیله، معارف فاخر اسلام و علوم اهل بیت علیهم‌السلام را نسل به نسل تا به امروز رسانیده و در این راستا بیشترین اهتمام را به کتاب‌های آموزشی داشته‌اند.

جامعه المصطفی صلی‌الله‌علیه‌وآله‌وسلم العالمیه نیز نهادی حوزوی و بین‌المللی است که تعلیم و تربیت فراگیران غیرایرانی را در حوزه علوم اسلامی و انسانی بر عهده دارد و مشتاقان بسیاری از ملیت‌های گوناگون در سطوح مختلف آموزشی و رشته‌های متنوع علوم اسلامی و انسانی در این نهاد تحصیل می‌کنند. دانش و بینش اسلامی طلاب غیرایرانی - با توجه به تنوع منطقه‌ای و کشوری - تفاوت‌هایی دارد، همین امر ایجاب می‌کند که نهاد که به تدوین متون نوین و متناسب با تنوع ملیتی بپردازد.

این نهاد مبارک، تدوین متون درسی متناسب با نظام آموزشی را از مأموریت‌های ویژه اداره کل تدوین متون درسی پژوهشگاه بین‌المللی المصطفی صلی‌الله‌علیه‌وآله‌وسلم قرار داده، و این اداره با اتکا به تجربه پیشین خود و دستیابی به شکوفایی جدید در تولید علم، امید دارد با عنایات الهی و توجهات حضرت ولی عصر علیه‌السلام از عهده این مأموریت برآمده و در گسترش فرهنگ و معارف اسلام ناب محمدی صلی‌الله‌علیه‌وآله‌وسلم سهیم باشد.

این اداره با قدردانی از فعالیت‌های گذشتگان می‌کوشد تا در اجرای مأموریت یاد شده با همکاری گروه‌های علمی جامعه المصطفی صلی‌الله‌علیه‌وآله‌وسلم و رعایت معیارهای پیشرفته

تدوین متون درسی، نیازهای آموزشی این نهاد مبارک را تأمین کند.
اثر علمی پیش روی نیز با عنوان «ریاضیات و کاربرد آن در اقتصاد» به همت
مؤلف محترم جناب آقای غلامرضا صفائی صادق، برای دوره کارشناسی رشته
اقتصاد به عنوان متن درسی تهیه و تدوین شده است که در چارچوب اهداف
جامعة المصطفیٰ ع، مبتنی بر نیازهای بین المللی است.
ضمن ارج نهادن به تلاش های خالصانه مؤلف محترم، از همکاری بخش های
مختلف جامعة المصطفیٰ ع که امکان چاپ و نشر این اثر را فراهم کرده اند، تشکر
و قدردانی می شود.

پژوهشگاه بین المللی المصطفیٰ ع

فهرست

۱۵.....	مقدمه
۱۷.....	فصل اول: مفهوم مجموعه
۱۷.....	مجموعه
۱۷.....	عضویت یا تعلق
۱۸.....	نمایش مجموعه
۱۸.....	نمایش مجموعه با بیان خاصیتی مشترک معین
۱۸.....	نمایش مجموعه با عضو
۱۸.....	نمایش مجموعه با علائم ریاضی
۱۹.....	نمایش مجموعه با نمودار
۱۹.....	معرفی چند مجموعه از اعداد
۲۰.....	مجموعه تهی
۲۰.....	تعریف زیرمجموعه
۲۲.....	مجموعه جهانی
۲۲.....	مجموعه مکمل
۲۳.....	اعمال روی مجموعه‌ها
۲۳.....	اجتماع دو مجموعه
۲۳.....	اشتراک
۲۵.....	تفاضل دو مجموعه
۲۵.....	قطعه‌ای از اعداد طبیعی
۲۶.....	مجموعه متناهی

۲۶	قرارداد
۲۷	قضیه
۲۸	افراز مجموعه‌ها
۲۹	حاصل ضرب مجموعه‌ها
۳۱	بازه‌ها
۳۱	بازه باز
۳۱	بازه بسته
۳۵	فصل دوم: تابع
۳۵	پیشینه تابع
۳۵	در دیگر علوم
۳۶	تعریف تابع
۳۷	تعریف دقیق
۳۸	علامت‌ها
۳۸	مشخص کردن تابع
۳۸	دامنه و برد تابع
۳۹	روش تعیین دامنه توابع حقیقی
۴۱	تساوی دو تابع
۴۱	تصویر و تصویر معکوس
۴۲	نمودار تابع
۴۴	تابع یک به یک
۴۶	تابع پوشا
۴۶	تعریف ریاضی
۴۶	تعریف کلی برای تابع پوشا یا تابع بر روی مجموعه‌ها
۴۶	تابع همانی
۴۷	توابع زوج و فرد

فهرست ۹

۴۷	تابع زوج
۴۸	تابع فرد
۴۸	اعمال روی توابع
۵۰	ترکیب توابع
۵۱	معکوس یک تابع
۵۱	تابع معکوس
۵۵	فصل سوم: نسبت های مثلثاتی
۵۷	دایره مثلثاتی
۵۹	رابطه بین نسبت های مثلثاتی
۶۰	واحدهای زاویه
۶۱	نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه
۶۳	فصل چهارم: حد و پیوستگی
۶۶	قضیه های حد
۶۶	قضیه ۱
۶۶	قضیه ۲
۶۶	قضیه ۳
۶۸	حد تابع های ساده مثلثاتی
۷۰	صورت مبهم
۷۲	تعمیم حد
۷۳	حد در بی نهایت
۷۵	پیوستگی تابع در یک نقطه
۷۷	پیوستگی راست تابع در یک نقطه
۷۷	پیوستگی چپ تابع در یک نقطه
۸۱	فصل پنجم: مشتق
۸۸	آهنگ تغییر

۹۱ مشتق تابع مرکب یا مشتق تابع تابع
۹۳ مشتق توابع مثلثاتی
۹۴ مشتق‌های مراتب بالا
۹۶ مجانِب
۹۶ ۱. مجانِب افقی
۹۷ ۲. مجانِب قائم
۹۸ ۳. مجانِب مایل
۱۰۱ فصل ششم: کاربرد مشتق
۱۰۱ بررسی و تحلیل منحنی
۱۰۲ نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع
۱۰۳ آزمون مشتق اول
۱۰۴ قضیه رول
۱۰۴ قضیه مقدار میانگین
۱۰۵ جهت تعقر و نقطه عطف منحنی
۱۰۵ آزمون مشتق دوم
۱۰۶ آزمون مشتق دوم برای اکستریم‌ها
۱۰۸ رسم منحنی توابع
۱۱۰ نقاطی که در آن نقاط تابع مشتق‌پذیر نیست
۱۱۲ نقاط بحرانی
۱۱۳ ماکزیمم و می‌نیمم مطلق یک تابع
۱۱۴ کاربردهای ماکزیمم و می‌نیمم
۱۱۹ کشش
۱۲۰ تابع درآمد، درآمد نهایی و کشش تقاضا
۱۲۵ فصل هفتم: توابع خاص
۱۲۵ توابع نمائی و لگاریتمی

فهرست ۱۱

۱۲۶.....	تابع لگاریتمی.....
۱۲۸.....	قوانین محاسبه با لگاریتمیم.....
۱۲۹.....	بعضی دیگر از قوانین لگاریتم.....
۱۳۰.....	لگاریتم اعشاری.....
۱۳۱.....	لگاریتم طبیعی.....
۱۳۲.....	کاربرد توابع نمائی و لگاریتمی در اقتصاد و مدیریت.....
۱۳۲.....	تراکم سرمایه.....
۱۳۴.....	نقطه سر به سر.....
۱۳۶.....	مشتق توابع نمایی.....
۱۳۷.....	مشتق تابع لگاریتمی.....
۱۳۸.....	تابع قدر مطلق.....
۱۳۹.....	۱. رسم نمودار توابع با قدر مطلق.....
۱۴۱.....	۲. خواص تابع قدر مطلق.....
۱۴۲.....	تابع براکتی یا جزء صحیح.....
۱۴۳.....	۱. رسم نمودار توابع با جزء صحیح.....
۱۴۴.....	۲. ویژگی های تابع براکتی.....
۱۴۵.....	قاعده هویپیتال.....
۱۴۶.....	مشتق گیری ضمنی.....
۱۴۹.....	روش نصف کردن.....
۱۵۱.....	روش نیوتن.....
۱۵۷.....	تست های چهارگزینه ای.....
۱۶۱.....	فصل هشتم: دیفرانسیل و انتگرال.....
۱۶۱.....	دیفرانسیل یا خطی سازی.....
۱۶۴.....	انتگرال.....
۱۶۴.....	مقدمه.....

انتگرال معین.....	۱۷۴
ویژگی‌های انتگرال معین.....	۱۷۸
قضیه‌های بنیادی.....	۱۸۶
تابع اولیه (انتگرال نامعین).....	۱۹۰
برخی از ویژگی‌های تابع اولیه.....	۱۹۳
انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر.....	۱۹۶
انتگرال‌گیری جزء به جزء.....	۱۹۹
کاربردهای انتگرال نامعین در اقتصاد و بازرگانی.....	۲۰۰
۱. هزینه.....	۲۰۱
۲. در آمد.....	۲۰۲
کاربرد انتگرال معین در محاسبه مساحت.....	۲۰۳
فصل نهم: توابع چند متغیره.....	۲۰۷
مشتق‌های جزئی.....	۲۰۷
اکسترمم توابع دو متغیره.....	۲۱۰
توابع چند متغیره (ادامه).....	۲۲۰
ماکزیمم و می‌نیمم توابع مقید.....	۲۲۵
روش ضرایب لاگرانژ.....	۲۲۶
فصل دهم: ماتریس.....	۲۳۵
تعریف ماتریس.....	۲۳۵
تساوی دو ماتریس.....	۲۳۶
عملیات روی ماتریس‌ها.....	۲۳۶
ضرب عدد در ماتریس (ضرب اسکالر).....	۲۳۷
ضرب ماتریس‌ها.....	۲۳۷
قوانین تعویض پذیری، شرکت پذیری و توزیع پذیری در جبر ماتریس‌ها.....	۲۴۰
انواع ماتریس‌ها.....	۲۴۰

فهرست ۱۳

۲۴۳.....	خواص ترانهاده.....
۲۴۳.....	ترانهاده حاصل ضرب ماتریس ها.....
۲۴۴.....	افراز ماتریس ها.....
۲۴۷.....	دترمینان یک ماتریس.....
۲۴۸.....	مینور (کهاد) و کوفاکتور (همسازه).....
۲۵۰.....	ویژگی های دترمینان.....
۲۵۲.....	ماتریس همسازه یک ماتریس.....
۲۵۳.....	ماتریس وابسته یا الحاقی.....
۲۵۴.....	ماتریس معکوس.....
۲۵۶.....	خواص معکوس ماتریس.....
۲۵۸.....	حل دستگاه به کمک ماتریس معکوس یا وارون.....
۲۶۰.....	حل دستگاه با دستور کرامر.....
۲۶۳.....	ماتریس هشین.....
۲۶۶.....	رسم نامعادلات خطی.....
۲۶۸.....	برنامه ریزی خطی.....

مقدمه

در دنیای امروز ریاضیات افزون بر کاربردهایش که ابزاری کامل برای بیان نظریه‌ها در تمامی شاخه‌های علوم است موجب تقویت قوه استدلال و ایجاد نظم فکری و دمیدن روح زیبایی‌شناسی در انسان می‌شود و باعث بالا بردن توانایی و حل مسئله و برخورد بهتر دانش‌پژوهان با مشکلات زندگی واقعی خواهد بود.

دانش‌پژوهان رشته‌های علوم انسانی دارای توانایی لازم برای یادگیری ریاضی هستند بشرطی که ریاضی ارائه شده متناسب با نیاز تحصیلی آنها باشد.

این کتاب که برای دانش‌پژوهان رشته‌های اقتصاد و مدیریت مؤسسه علوم انسانی جامعة المصطفی ﷺ تهیه شده، برای دیگر رشته‌های علوم انسانی در تمامی دانشگاه‌های سراسر میهن اسلامی نیز قابل استفاده می‌باشد.

برای درک بهتر مطالب در این کتاب مثال‌هایی متناسب با موضوع درس حل شده است که یادگیری را برای دانش‌پژوهان آسان می‌کند و همچنین در انتهای هر درس تمرین متناسب با آن آورده شده است.

در رشته‌های مختلف علوم انسانی مانند اقتصاد، مدیریت، حسابداری و... بدون استفاده از ریاضیات پیشرفته بیان بسیاری از مطالب غیر ممکن است با در نظر گرفتن این موضوع در کتاب حاضر ابتدا به نظریه مجموعه‌ها پرداخته شده و تعریف تابع را همراه با بیان حد، پیوستگی، مشتق و دیفرانسیل که در اقتصاد و مدیریت کاربرد زیاد دارد ارائه گردیده است و در ادامه انتگرال و بعضی روش‌های

انتگرال گیری مورد استفاده در رشته های علوم انسانی و کاربرد مشتق در جهت معرفی نقاط ماکزیمم، می نیمم و نقطه عطف توابع یک متغیره و مشتق در توابع چند متغیره و کاربرد آن در مسائل اقتصادبه همراه معرفی ماتریس ها و برنامه ریزی خطی آورده شده است.

خداوند بزرگ را شاکرم که توفیق تهیه این کتاب را برای دانش پژوهان جامعه المصطفی ﷺ نصیبم کرد.

غلامرضا صفایی صادق