

آشنایی با مقاطع مخروطی

درس ۱

مکان هندسی



مکان هندسی

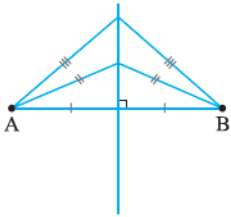
به احتمال زیاد به یاد دارید که در قسمت «ترسیم‌های هندسی» هندسهٔ دهم یک سری نقطه داشتیم که ویژگی‌های مشترکی داشتند؛ مثل نقاطی که روی نیمساز یک زاویه واقع‌اند، ویژگی این نقاط این بود که از دو ضلع زاویه به یک فاصله بودند.

از این نقاط که دارای ویژگی مشترک هستند با نام «مکان هندسی» هم یاد می‌کنند.

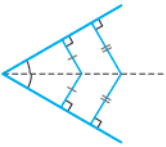
در واقع «مکان هندسی» مجموعهٔ نقاطی از صفحه یا فضا است که: ۱) دارای یک ویژگی مشترک باشند، ۲) هر نقطه‌ای که این ویژگی مشترک را داشته باشد، عضو مجموعهٔ موردنظر باشد.

مکان‌های هندسی مهم و معروف

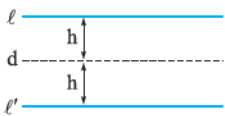
۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



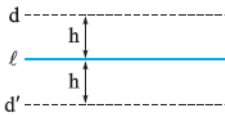
۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو ضلع یک زاویه، به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویهٔ موردنظر است.



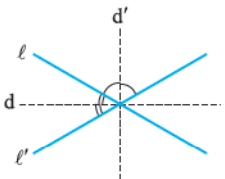
۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی l و l' به یک فاصله‌اند، خطی موازی با دو خط و در وسط آن‌ها.



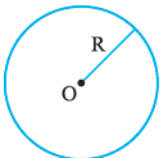
۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط l به فاصلهٔ ثابت h باشند، دو خط موازی d و d' به موازات l و در طرفین l است.

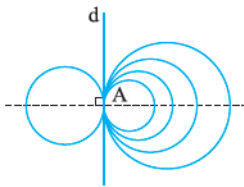


۵) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع l و l' به یک فاصله باشند، نیمسازهای زوایای بین l و l' است که بر هم عمودند. (d و d' نیمسازهای زوایای بین l و l' هستند).

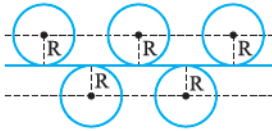


۶) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ معلوم O به فاصلهٔ R هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.

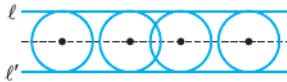




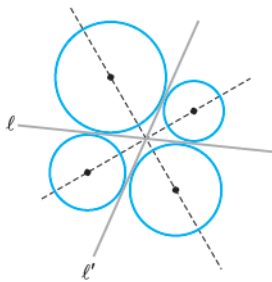
۷ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطه A بر خط d مماس باشند، خطی است که در نقطه A بر d عمود است.



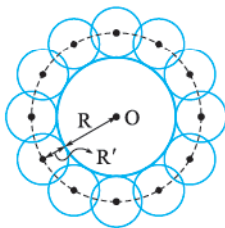
۸ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R که بر خط d مماس‌اند (روی خط d می‌غلتند)، دو خط به موازات و به فاصله R از آن است که از مراکز دایره‌ها می‌گذرد.



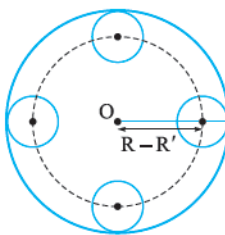
۹ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط موازی l و l' مماس‌اند، خطی است موازی با l و l' و در وسط آن‌ها که از مرکز دایره‌ها می‌گذرد.



۱۰ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو خط متقاطع l و l' مماس‌اند، نیمسازهای زوایای بین دو خط l و l' است.



۱۱ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و در خارج آن می‌غلتند (دو دایره، مماس‌خارج‌اند)، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R + R'.



۱۲ مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R' که روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و در داخل آن می‌غلتند (دو دایره، مماس‌داخل‌اند)، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع R - R'.

تست سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را روی صفحه‌ای به شکل مربع به ضلع ۱۰ سانتی‌متر برتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقاطی درون مربع که

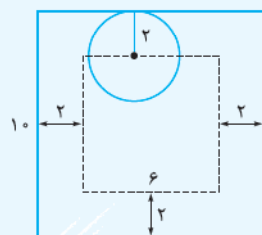
اگر مرکز سکه در آن‌جا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع می‌شود، کدام است؟

(۲) محیط یک مربع به قطر $6\sqrt{2}$

(۱) سطح یک مربع به قطر $6\sqrt{2}$

(۴) محیط یک مربع به قطر $8\sqrt{2}$

(۳) سطح یک مربع به قطر $8\sqrt{2}$



پاسخ گزینه ۱

برای آن که سکه کاملاً داخل مربع قرار گیرد، باید مرکز سکه از هر ضلع مربع حداقل

۲ سانتی‌متر فاصله داشته باشد، پس مرکز سکه باید روی سطح یک مربع به ضلع ۶ سانتی‌متر (قطر $6\sqrt{2}$

سانتی‌متر) واقع شود.

تست حداکثر چند نقطه روی دایره‌ای به شعاع ۷ وجود دارد که از خط d به فاصله $3/5$ باشند؟

۴ (۴)

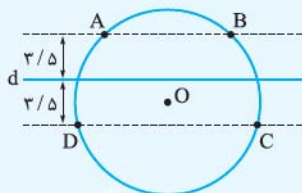
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

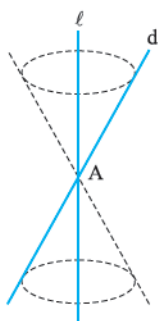


پاسخ گزینه ۲ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله $3/5$ باشند، دو خط موازی با d و در طرفین d است.

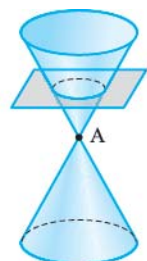


محل برخورد دایره و دو خط موازی با d جواب مسئله است. برای این که حداکثر تعداد نقاط را داشته باشیم باید هر دو خط، دایره را قطع کنند؛ یعنی به شکل مقابل باشند: نقاط A, B, C, D جواب سؤال هستند؛ پس حداکثر ۴ نقطه با شرایط گفته شده وجود دارد.

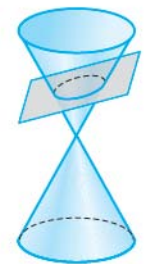
رویه مخروطی



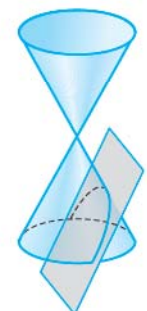
اگر دو خط d و l در نقطه A متقاطع باشند، سطح حاصل از دوران خط d حول خط l را یک رویه مخروطی (سطح مخروطی) گویند. نقطه A را رأس، خط l را محور و خط d را مولد سطح مخروطی می‌گویند.



۱ اگر صفحه‌ای عمود بر محور مخروط قائم، آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل دایره است. (اگر صفحه گفته شده از رأس A می‌گذشت، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، نقطه A بود.)



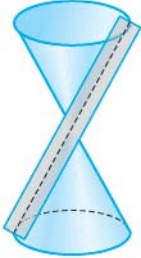
۲ اگر صفحه بر محور مخروط عمود نباشد (به طور مایل آن را قطع کند) و با مولد موازی نباشد (یک شکل بسته ایجاد کند)، سطح مقطع حاصل، بیضی است.



۳ اگر صفحه‌ای موازی با یکی از مولدهای مخروط، آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل، سهمی است.



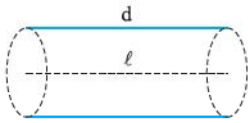
۴ اگر صفحه‌ای موازی با محور مخروط، آن را قطع کند، سطح مقطع حاصل، هذلولی است.



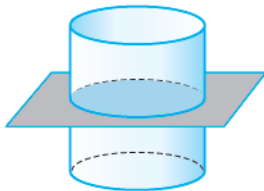
۵ اگر صفحه شامل یکی از مولدها باشد، مقطع حاصل یک خط است.



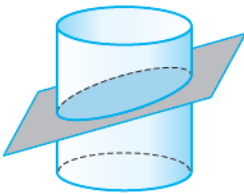
۶ اگر صفحه شامل محور مخروط باشد، مقطع حاصل، دو خط متقاطع است.



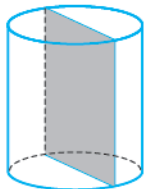
اگر دو خط d و l (بهتر است بگوییم دو پاره‌خط d و l) موازی باشند، از دوران d حول l یک استوانه ایجاد می‌شود.



۱ اگر صفحه p موازی با قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل دایره است.



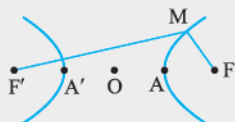
۲ اگر صفحه p ، استوانه را مایل قطع کند، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.



۳ اگر صفحه p ، عمود بر قاعده استوانه، استوانه را قطع کند، سطح مقطع حاصل، مستطیل است.

مطالعه نیمه آزاد

کتاب درسی به بررسی هذلولی نمی‌پردازد. به احتمال زیاد در دانشگاه توابع هیپربولیک (هذلولوی) و رویه هذلولی‌گون به گوش شما خواهد خورد. شاید بد نباشد! اطلاعاتی در مورد هذلولی داشته باشید.

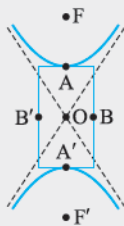


هذلولی را این‌گونه تعریف می‌کنند: «مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه ثابت به نام کانون به فاصله ثابت (طول قطر هذلولی) است.» $|MF - MF'| = AA' = 2a$

(F و F' کانون‌ها، A و A' رئوس کانونی و فاصله O تا A برابر a است.)

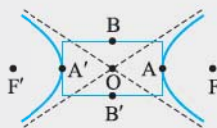
هدلولی دو نوع افقی و قائم دارد. (بدانید که $OA = OA' = a$ ، $OF' = OF = c$ ، رابطه مهم هدلولی $c^2 - a^2 = b^2$ و $OB = OB' = b$ است.)

معادلات هدلولی:



هدلولی قائم به مرکز $O(\alpha, \beta)$

$$\frac{(y - \beta)^2}{a^2} - \frac{(x - \alpha)^2}{b^2} = 1$$



هدلولی افقی به مرکز $O(\alpha, \beta)$

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} - \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۲۳۶- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط موازی d و d' به یک فاصله هستند، کدام است؟
 (۱) یک خط (۲) دو خط موازی (۳) دو خط عمود بر هم (۴) یک صفحه
- ۲۳۷- مکان هندسی مراکز دایره‌هایی که بر دو خط موازی مماس‌اند، کدام است؟
 (۱) دایره (۲) دو خط موازی (۳) یک خط (۴) دو خط عمود بر هم
- ۲۳۸- مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند، کدام است؟
 (۱) خطی موازی با d و به فاصله r از d (۲) خطی موازی با d و به فاصله $2r$ از d
 (۳) دو خط موازی با d به فاصله r از d (۴) دو خط موازی با d و به فاصله $2r$ از d
- ۲۳۹- مکان هندسی مرکز تویی به شعاع R که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم در حال حرکت می‌باشد، کدام است؟
 (۱) یک صفحه (۲) یک خط (۳) دو خط موازی (۴) دایره
- ۲۴۰- مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع 2 که بر دایره $C(O, 5)$ مماس داخلی‌اند، کدام است؟
 (۱) دایره‌ای به شعاع 1 (۲) دایره‌ای به شعاع 2 (۳) دایره‌ای به شعاع 3 (۴) دایره‌ای به شعاع 4
- ۲۴۱- مکان هندسی مرکزهای همه دایره‌ها با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O, r)$ مماس خارجی‌اند، کدام است؟
 (۱) دایره‌ای به شعاع $2r$ (۲) مربعی به طول ضلع $2r$ (۳) دایره‌ای به شعاع $\frac{3r}{2}$ (۴) مربعی به طول ضلع $4r$
- ۲۴۲- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی با شعاع 3 که بر دایره $C(O, 4)$ مماس خارجی‌اند را در نظر بگیرید. بیشترین فاصله نقاط این مکان هندسی چه قدر است؟
 (۱) 7 (۲) 11 (۳) 14 (۴) 20
- ۲۴۳- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه A مماس‌اند، کدام است؟
 (۱) خطی موازی با خط d (۲) دایره‌ای به مرکز A (۳) خطوط عمود بر خط d (۴) خط عمود بر خط d در نقطه A
- ۲۴۴- تعداد نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به ترتیب به فاصله $5/2$ و $3/5$ سانتی‌متر باشند، کدام است؟
 (۱) بی‌شمار (۲) 4 (۳) 2 (۴) صفر
- ۲۴۵- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع 3 سانتی‌متر که از نقطه ثابت A می‌گذرند، کدام است؟
 (۱) مربعی به طول 3 سانتی‌متر (۲) دایره‌ای به قطر 3 سانتی‌متر (۳) مربعی به طول 6 سانتی‌متر (۴) دایره‌ای به قطر 6 سانتی‌متر
- ۲۴۶- خط d و پاره خط AB بر هم عمود نیستند. چند نقطه روی خط d وجود دارد که از نقاط A و B به یک فاصله باشند؟
 (۱) صفر (۲) 1 (۳) 2 (۴) بی‌شمار
- ۲۴۷- خط d و دو نقطه A و B طوری در صفحه قرار دارند که خط گذرنده از A و B بر d عمود است. چند نقطه روی d وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشند؟
 (۱) صفر (۲) صفر یا یک (۳) صفر یا بی‌شمار (۴) یک یا بی‌شمار
- ۲۴۸- نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض‌اند. کدام گزینه تعداد نقاطی را مشخص می‌کند که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشند؟
 (۱) حداکثر یک (۲) دقیقاً یک (۳) یک، بی‌شمار (۴) صفر، یک، بی‌شمار
- ۲۴۹- حداکثر چند نقطه روی دایره C به شعاع 5 وجود دارد که از خط Δ به فاصله $5/2$ باشند؟
 (۱) 4 (۲) 3 (۳) 2 (۴) 1
- ۲۵۰- مکان هندسی رئوس مثلث‌هایی در صفحه که طول قاعده آن‌ها 4 سانتی‌متر و مساحت آن‌ها 8 سانتی‌متر مربع باشد، کدام است؟
 (۱) 2 دایره به شعاع 4 سانتی‌متر به مراکز B و C (۲) 4 دایره به شعاع 4 سانتی‌متر به مراکز B و C
 (۳) خطی موازی با قاعده و به فاصله 4 سانتی‌متر از آن (۴) دو خط موازی به فاصله 8 سانتی‌متر

۲۵۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، کدام است؟

- (۱) دو خط عمود بر هم (۲) یک دایره (۳) یک خط (۴) دو خط متقاطع

۲۵۲- مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فواصلشان از دو خط متقاطع مقداری ثابت باشد، کدام است؟

- (۱) یک خط (۲) دو خط متقاطع (۳) یک دایره (۴) دو دایره

۲۵۳- حداکثر چند نقطه روی خط L وجود دارد که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۲۵۴- روی دایره C حداکثر چند نقطه وجود دارد که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۸

۲۵۵- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که از دو نقطه A و B می‌گذرند، کدام است؟

- (۱) خطوط موازی با AB (۲) یک خط عمود بر AB (۳) دو خط موازی با AB (۴) خطوط عمود بر AB

۲۵۶- مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو خط موازی d و d' که فاصله آن‌ها ۴ سانتی‌متر است، برابر با ۴ سانتی‌متر باشد، کدام است؟

- (۱) یک خط بین دو خط d و d' (۲) دو خط موازی با d و d' (۳) نقاط بین d و d' (۴) نقاط روی d و d'

۲۵۷- مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فاصله‌های آن‌ها از دو خط موازی d و d' که فاصله آن‌ها ۴ سانتی‌متر است، برابر ۳ سانتی‌متر باشد، کدام است؟

- (۱) تمام نقاط بین d و d' (۲) دو خط موازی با d و d' (۳) نقاط خارج از فضای بین دو خط (۴) یک خط

۲۵۸- فاصله دو نقطه A و B روی دو خط عمود بر هم d و d' همواره برابر ۲ است. مکان هندسی نقطه وسط AB کدام است؟

- (۱) یک خط (۲) دو خط موازی (۳) دایره (۴) مربع

۲۵۹- A و B دو نقطه ثابت و C نقطه‌ای متغیر از یک صفحه‌اند. با حرکت نقطه C ، مکان هندسی نقطه هم‌رسی عمودمنصف‌های مثلث ABC کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به مرکز وسط AB (۲) یک نقطه (۳) خطی موازی با AB (۴) خطی عمود بر AB

۲۶۰- مکان هندسی رأس A از مثلث ABC که نقاط B و C و طول میانه AM در آن ثابت هستند، کدام است؟

- (۱) دایره (۲) یک خط (۳) دو خط موازی (۴) نیم‌خط

آزمونک

۲۶۱- چند نقطه در صفحه دو خط متقاطع d و d' وجود دارد که از خط d به فاصله ۳ و از خط d' به فاصله ۵ باشند؟

- (۱) بی‌شمار (۲) چهار (۳) دو (۴) یک

۲۶۲- کدام گزینه تعداد نقاط روی دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر که از خط d به فاصله ۲ سانتی‌متر باشند را مشخص نمی‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۲۶۳- نقاط M و N به ترتیب روی دو خط موازی d و d' قرار دارند. مکان هندسی وسط پاره‌خط MN کدام است؟

- (۱) یک خط (۲) نیم‌دایره (۳) دایره (۴) پاره‌خط عمود بر d و d'

۲۶۴- مکان هندسی مرکز دایره‌هایی با شعاع ۳ که بر دایره $C(O, 4)$ مماس خارجی‌اند را در نظر بگیرید. بیشترین فاصله نقاط روی دایره‌هایی که بر دایره C مماس خارجی‌اند، چه قدر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۱۱ (۳) ۱۴ (۴) ۲۰

۲۶۵- نقطه A و طول ضلع AB از مثلث ABC ثابت‌اند. مکان هندسی نقطه M پای میانه مرسوم از رأس C کدام است؟

- (۱) خط (۲) دو خط (۳) نیم‌دایره (۴) دایره

سری

۲۶۶- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن‌ها مماس‌هایی به طول ۴ بر دایره $C(O, 2)$ رسم می‌شود، کدام است؟

- (۱) دایره (۲) یک خط (۳) دو خط (۴) محیط یک مربع

۲۶۷- حداکثر چند دایره به شعاع ۱ می‌توان رسم کرد که بر دایره $C(O, 4)$ و خط d مماس باشند؟

- (۱) ۴ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) بی‌شمار

۲۶۸- فرض کنید دو خط d و d' بر هم عمودند. مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آن‌ها از خط d' سه برابر فاصله آن‌ها از خط d باشد، کدام است؟

- (۱) چهار نقطه (۲) محیط یک چهارضلعی (۳) دو خط عمود بر هم (۴) دو خط متقاطع

۲۶۹- دایره‌ای بر مثلث ABC که در رأس A قائمه است، محیط شده است. اگر نقاط B و C ثابت باشند و نقطه A روی محیط دایره حرکت کند، مکان هندسی نقطه G مرکز ثقل مثلث کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به شعاع $\frac{BC}{6}$ (۲) دایره‌ای به شعاع $\frac{BC}{4}$ (۳) دایره‌ای به شعاع $\frac{BC}{3}$ (۴) دایره‌ای به شعاع $\frac{BC}{2}$

۲۷۰- مکان هندسی نقاطی از صفحه که از سه نقطه A, B و C به یک فاصله باشد، کدام است؟

- (۱) حداکثر یک نقطه (۲) یک نقطه (۳) حداکثر دو خط متقاطع (۴) دو خط متقاطع

۲۷۱- دو نقطه C و D و طول AD از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ثابت‌اند. مکان هندسی محل تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع $ABCD$ روی کدام شکل قرار دارد؟

- (۱) نقطه هم‌مرسی میانه‌های مثلث ADC (۲) نقطه هم‌مرسی میانه‌های مثلث BCD

- (۳) خطی که از وسط DC عبور می‌کند. (۴) دایره‌ای به مرکز وسط DC

۲۷۲- خط d اضلاع زاویه O را در نقاط A و B قطع کرده است. اگر مکان خط d تغییر کند، مکان هندسی محل تلاقی نیمسازهای زوایای OAB و

OBA کدام است؟

- (۱) خط (۲) یک نقطه ثابت (۳) تمام نقاط بین دو نیم‌خط زاویه (۴) دایره

۲۷۳- قاعده BC از مثلث ABC ثابت و نقطه M وسط BC مفروض است. رأس A روی خطی موازی با BC و به فاصله d از آن حرکت می‌کند. مکان

هندسی G ، نقطه برخورد میانه‌های مثلث ABC کدام است؟

- (۱) خطی موازی با BC و به فاصله $\frac{d}{3}$ از آن (۲) دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{d}{3}$

- (۳) خطی موازی با BC و به فاصله $\frac{2d}{3}$ از آن (۴) دایره‌ای به مرکز M و شعاع $\frac{2d}{3}$

۲۷۴- قطرهای مربعی قسمتی از دو خط متمایز d و d' هستند. مکان هندسی نقاطی در صفحه که مجموع فواصل آن نقاط از دو خط d و d' برابر ۱۳

باشد، کدام است؟

- (۱) دایره‌ای به شعاع ۱۳ (۲) مربعی به طول ضلع ۱۳ (۳) دایره‌ای به شعاع $۱۳\sqrt{2}$ (۴) مربعی به طول ضلع $۱۳\sqrt{2}$

۲۷۵- مکان هندسی نقاطی از صفحه که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو خط متقاطع برابر ۳ سانتی‌متر باشد، کدام است؟

- (۱) ۴ خط (۲) ۴ نیم‌خط (۳) محیط یک مستطیل (۴) ۸ نیم‌خط