



۴۱ برای پاسخ دادن به این تست، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

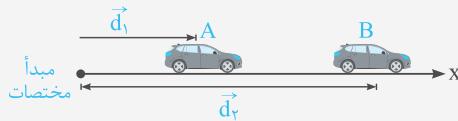
(تست‌های ۱ تا ۶)

مفهوم بردار مکان، جابه‌جایی و مسافت طی شده

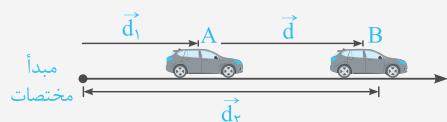
خلاصه نکات ۱

تو اولین مرحله ورودتون به دوازدهم، بريم بينيم پارامترهاي بردار مکان و جابه‌جايی چی هستن؟ ايشلا که تا آنرا کتاب فيلي فوش بگذره.

۱- بردار مکان و جابه‌جایی



بردار مکان: در شکل مقابل اتومبیلی بر روی محور x در حال حرکت است. بردار مکان در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرک، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل می‌شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده شده است.



بردار تغییر مکان (جابه‌جایی): متحرک نشان داده شده در شکل مقابل، در بازه زمانی $t_2 - t_1$ از نقطه A تا نقطه B منتقل شده است. بردار جابه‌جایی در هر بازه زمانی برای این متحرک، برداری است که محل متحرک در شروع بازه زمانی را مستقیماً به محل متحرک در انتهای آن بازه زمانی متصل می‌کند.

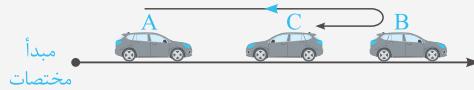
ذکر همان‌گونه که مشاهده می‌شود، بردار جابه‌جایی معادل با تفاضل بردارهای مکان در نقاط A و B است.

$$\vec{d} = \vec{d}_B - \vec{d}_A = \vec{d}_2 - \vec{d}_1$$

$$\vec{d}_2 - \vec{d}_1$$

فوب یارتون باشه که بردار $\vec{d}_2 - \vec{d}_1$ از انتهای \vec{d}_1 به انتهای \vec{d}_2 وصل می‌شه.

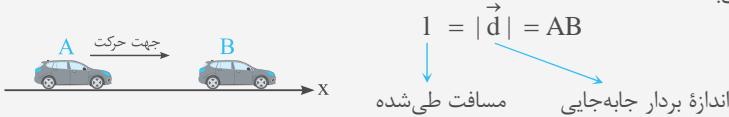
۲- مسافت طی شده



فرض کنید مطابق شکل، اتومبیلی از نقطه A به B رفته و سپس از نقطه B به نقطه C بازگردد. به طول مسیر طی شده توسط اتومبیل، مسافت پیموده شده یا به اختصار مسافت می‌گویند.

ذکر همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی شده ABC از طول پاره خط AC (جابه‌جایی) بزرگ‌تر است. در مجموع می‌توان گفت «مسافت طی شده توسط یک متحرک، همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه جابه‌جایی متحرک است.»

ذکر در شکل زیر یک اتومبیل در جهت محور X منتقل شده است. در این حالت خاص طول بردار جابه‌جایی و مسافت طی شده با یکدیگر برابر بوده و همان‌دانزه با طول پاره خط AB است.



$$l = |\vec{d}| = AB$$

مسافت طی شده

اندازه بردار جابه‌جایی

نکات مهم و کاربردی

۱ فرض کنید متحرکی مطابق شکل مقابل از نقطه A تا نقطه B حرکت کند. بدین ترتیب بردار مکان متحرک در نقاط A و B و بردار جابه‌جایی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{d}_1 = x_1 \vec{i}, \quad \vec{d}_2 = x_2 \vec{i} \Rightarrow \vec{d} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1 = x_2 \vec{i} - x_1 \vec{i} = (x_2 - x_1) \vec{i} = \Delta x \vec{i}$$

۲ اگر متحرک در سمت راست مبدأ باشد (B)، بردار مکان در جهت محور X قرار دارد و اگر متحرک در سمت چپ مبدأ باشد (A)، بردار مکان در خلاف جهت محور X قرار می‌گیرد.

۳ در هنگام عبور متحرک از مبدأ، بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، این موضوع از نکات تست خیز این خلاصه نکات محسوب می‌شود.

۴ اگر $\Delta x > 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در جهت محور X و اگر $\Delta x < 0$ باشد، بردار جابه‌جایی در خلاف جهت محور X است.

۵ مسافت طی شده کمیتی نرده‌ای بوده و جابه‌جایی کمیتی برداری است.



فصل اول: حرکت بر خط راست

۹



هلا بريم با يه تمرين درست هسابي، مطالب اين فلاشهات رو پمع بندي کنيم ...

تمرین ۱ در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده شده بر روی محور X از نقطه A

شروع به حرکت کرده و به نقطه B می رود و سپس از نقطه B به سمت نقطه C

باز می گردد. کدام عبارت در مورد حرکت این اتومبیل از A تا C نادرست است؟

۲) ۸ متر از مسافت طی شده، در خلاف جهت محور X است.

۱) بردار مکان متحرک در نقطه C برابر \vec{I} در SI می باشد.

۴) بردار جایه جایی متحرک از A تا C، برابر \vec{I}^6 در SI می باشد.

۳) این متحرک از A تا C، مسافت ۱۰ m را طی کرده است.

پاسخ برای تحلیل این سؤال آموزشی، به موارد زیر توجه کنید:

۱) بردار مکان متحرک در نقاط A، B و C به صورت زیر است.

$$\vec{d}_A = 5\vec{i} \quad \vec{d}_B = -3\vec{i} \quad \vec{d}_C = -1\vec{i}$$

۲) این متحرک از نقطه A تا نقطه B ۸ m در خلاف جهت محور X و از نقطه C ۲ m در جهت محور X حرکت کرده است و در مجموع مسافتی به اندازه ۱۰ m را طی کرده است.

۳) بردار جایه جایی متحرک از A تا C نیز به صورت زیر به دست می آید:

بنابراین تنها عبارت مطرح شده در گزینه (۴) نادرست است.



در صورتی که متحرکی بر روی یک خط راست جایه جایی شود و در طول حرکت تغییر جهت ندهد، آنگاه مسافت طی شده و جایه جایی متحرک با یکدیگر برابر است. به طور مثال در شکل مقابل، اگر اتومبیل ۱۰ mتر در مسیر مستقیم و بدون تغییر جهت حرکت کند، می توان نوشت:

$$\Rightarrow 1 = \Delta x = 10 \text{ m}$$

↓ ↓
جایه جایی مسافت طی شده

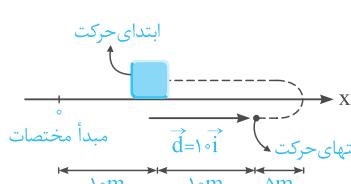
عبارت صحیح: «مسافت طی شده توسط متحرک همواره بزرگ‌تر یا مساوی جایه جایی آن است.»

دققت شود که با توجه به خلاصه نکات فوق، سایر گزینه‌ها صحیح می باشد.

۲ همان‌طور که می‌دانیم، جایه جایی در هر بازه زمانی تنها به مکان ابتدایی و انتهایی متحرک در آن بازه بستگی داشته (یعنی مستقل از مسیر حرکت است) و به صورت زیر به دست می‌آید:

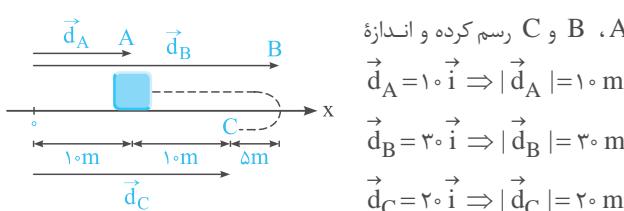
$$\begin{cases} t_1 \rightarrow x_1 = -3 \text{ m} \\ t_2 \rightarrow x_2 = +3 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = +3 - (-3) = +6 \text{ m}$$

$$\begin{cases} t_1 \rightarrow x_1 = -3 \text{ m} \\ t_3 \rightarrow x_3 = +9 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_3 - x_1 = +9 - (-3) = +12 \text{ m}$$



۲ ابتدا باید دققت شود که بردار مکان، از مبدأ به محل جسم متصل می‌شود. با توجه به این‌که در این سؤال، جسم همواره در سمت راست مبدأ قرار دارد ($x > 0$)، بردار مکان آن ($\vec{d}_1 = x\vec{i}$)، همواره در جهت محور X قرار دارد (فریب برگشتن متحرک در B را نخورید).

از سوی دیگر برای یافتن بردار جایه جایی در طول حرکت، کافیست مطابق شکل، برداری را که مستقیماً از نقطه ابتدای حرکت به نقطه انتهای حرکت متصل می‌شود رارسم کنیم:



۳ **روش اول:** مطابق شکل مقابل بردارهای مکان متحرک را در نقاط A، B و C رسم کرده و اندازه

$$\vec{d}_A = 10\vec{i} \Rightarrow |\vec{d}_A| = 10 \text{ m}$$

$$\vec{d}_B = 30\vec{i} \Rightarrow |\vec{d}_B| = 30 \text{ m}$$

$$\vec{d}_C = 20\vec{i} \Rightarrow |\vec{d}_C| = 20 \text{ m}$$

آن‌ها را به دست می‌آوریم:

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اندازه بردار مکان این متحرک، ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

روش دوم: همواره با دور شدن متن حکم از مبدأ، اندازه بردار مکان آن افزایش و با نزدیک شدن متحرک به مبدأ، اندازه بردار مکان آن کاهش می‌یابد. با توجه

به این موضوع، در این سؤال در طی حرکت از A تا B، اندازه بردار مکان در حال افزایش و از B تا C، اندازه بردار مکان در حال کاهش است.

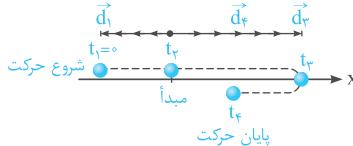


۲ ۵

برای پاسخ به این سؤال مفهومی، به موارد زیر توجه کنید:

- (۱) در بازه زمانی t_1 تا t_2 متحرك در سمت چپ مبدأ مختصات قرار دارد و بردار مکان آن در خلاف جهت محور X قرار می‌گیرد.
- (۲) در بازه زمانی t_3 تا t_4 متحرك در سمت راست مبدأ مختصات قرار می‌گیرد و بردار مکان آن در جهت محور X می‌باشد.

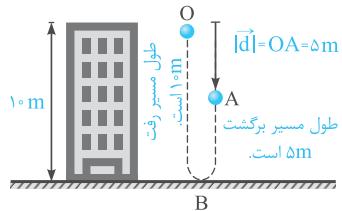
- (۳) در لحظه t_5 ، متحرك از مبدأ عبور کرده و بردار مکان متحرك تغییر جهت می‌دهد. به شکل مقابل دقت کنید:

در این سؤال، در لحظه t_5 ، سرعت متحرك تغییر جهت می‌دهد، اما بردار مکان آن تغییر جهت نمی‌دهد.

این موضوع توسط بسیاری از دانشآموزان اشتباه درک می‌شود.

هشدار

- با توجه به شکل نشان داده شده، گلوله بعد از پرتاب ابتدا ۱۰ متر به سمت پایین رفته و پس از برخورد به زمین در نقطه B، تغییر جهت داده و ۵ متر به سمت بالا می‌آید تا به نقطه A برسد. بنابراین مسافت طی شده توسط گلوله برابر $10 + 5 = 15$ متر است. از طرفی مطابق تعریف، جایه‌جایی برداری است که نقطه ابتدای حرکت را مستقیماً به نقطه انتهای حرکت (A) متصل کند، یعنی اندازه پاره خط OA به طول ۵m معادل با مقدار جایه‌جایی متحرك است.



$$|d| = |OA| = 5 \text{ m} \quad |d| = \text{اندازه جایه‌جایی}$$

$$\frac{\text{مسافت}}{\text{اندازه جایه‌جایی}} = \frac{\text{برگشت} + \text{رفت}}{\text{OA}} = \frac{10 + 5}{5} = 3$$

دقت: مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر و یا مساوی جایه‌جایی است و گزینه (۱) هیچ‌گاه نمی‌تواند صحیح باشد.

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

خلاصه نکات ۲

(تست‌های ۷ تا ۱۵)

بررسی ویژگی‌های معادله مکان - زمان

درک مفهوم ساده معادله یه پارامتر (مثلاً مکان) بحسب زمان، تو این فصل فیلی برای من مهمه. بریم بیشم په پوری میشه با این مفهوم یه ارتباط فوبی برقرار کرد.

۱- شناخت معادله مکان - زمان

معادله مکان - زمان یک متحرك، معادله‌ای است که مکان متحرك را در هر لحظه مشخص می‌کند. فرض کنید متحركی بر روی محور X در حال حرکت است و معادله مکان - زمان آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

این معادله، معادله‌ای است که اگر زمان را در آن قرار دهیم، بلاعده موقعیت متحرك را به ما می‌دهد. مثلاً داریم:

$$x = t^3 + 2t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = 0^3 + 2 \times 0 + 5 = 5 \text{ m} & (\text{در } t_0 = 0 \text{ شروع حرکت}), x_0 = 5 \text{ m} \text{ است.} \\ t_1 = 1s \rightarrow x_1 = 1^3 + 2 \times 1 + 5 = 8 \text{ m}, t_1 = 1s & (\text{در } x_1 = 8 \text{ m}, t_1 = 1s \text{ است.}) \\ t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 2^3 + 2 \times 2 + 5 = 17 \text{ m}, t_2 = 2s & (\text{در } x_2 = 17 \text{ m}, t_2 = 2s \text{ است.}) \end{cases}$$

ذکر اگر از ما بخواهند جایه‌جایی متحرك را در یک بازه زمانی مانند $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 2s$ از روی معادله مکان - زمان به دست آوریم، کافی است مقادیر t_1 و t_2 را در معادله مکان قرار داده و حاصل x_1 و x_2 را به دست آوریم، $x_2 - x_1$ ، معادل با جایه‌جایی متحرك است.

$$\begin{cases} t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 17 \text{ m} \\ t_1 = 1s \rightarrow x_1 = 8 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 17 - 8 = 9 \text{ m}$$

نکات مهم و کاربردی

۱) مکان اولیه متحرك، یعنی مکان آن در لحظه $t = 0$ بنا براین برای پیدا کردن مکان اولیه یک متحرك، کافی است در معادله مکان - زمان آن، پارامتر t را برابر صفر قرار دهیم.

۲) متحركی بر روی محور X در حال حرکت است، این متحرك هنگامی از مبدأ عبور می‌کند که $x = 0$ شود. به عبارتی برای پیدا کردن لحظات عبور یک متحرك از مبدأ، کافی است برای آن $x = 0$ قرار داده شود.

۳) ثانیه اول حرکت، یک بازه زمانی است که طول آن برابر یک ثانیه بوده و از $t = 0$ شروع می‌شود

یعنی $1s < t < 1s$ ، ثانیه دوم حرکت یعنی $2s < t < 2s$ و به همین صورت می‌توان گفت:

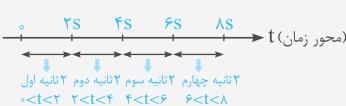
$$\text{ثانیه } n \text{ ام: } n - 1 < t < n$$





۱۱

فصل اول: حرکت بر خط راست



دو ثانیه اول حرکت یک بازه زمانی است که طول آن برابر دو ثانیه و $t = 0$ شروع می‌شود، یعنی (محور زمان) . دو ثانیه دوم یعنی $4s < t < 2s$ * و به همین صورت دو ثانیه‌های بعدی نیز نوشته می‌شود. در ادامه با حل سه تمرین نسبتاً ساده، مفاهیم ارائه شده را بهتر درک می‌کنیم.

تمرین ۱ دو ثانیه هشتم از یک حرکت، معادل با چه بازه زمانی است؟

پاسخ دو ثانیه هشتم یک حرکت، یعنی ۸ بازه زمانی ۲ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای این بازه زمانی $16s = 8 \times 2$ است، از طرفی طول هر بازه زمانی $2s$ است یعنی: $16s < t < 14s \leftarrow 2 \text{ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.$

تمرین ۲ نه ثانیه پنجم از یک حرکت، معادل با چه بازه زمانی است؟

پاسخ نه ثانیه پنجم یک حرکت، یعنی ۵ بازه زمانی ۹ ثانیه‌ای از شروع حرکت گذشته است و به عبارتی انتهای بازه زمانی $45s = 5 \times 9$ است، از طرفی طول هر بازه زمانی $9s$ است یعنی $45s < t < 45s \leftarrow 9 \text{ ثانیه از انتهای بازه کم می‌کنیم.$

تمرین ۳ معادله حرکت متحرکی بر روی محور x در SI از رابطه $x = t^2 - 4t$ به دست می‌آید. در این صورت جایه جایی متحرک در ۲ ثانیه اول حرکت و در ۲ ثانیه سوم حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر است؟ (قابلی)

$$10, -4 (4)$$

$$8, -4 (3)$$

$$10, -6 (2)$$

$$12, -4 (1)$$

پاسخ برای پاسخ به این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبه جایه جایی متحرک در ۲ ثانیه اول حرکت ($0 < t < 2s$):

$$x = t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 2^2 - 4 \times 2 = -4 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -4 \text{ m}$$

گام دوم: محاسبه جایه جایی در ۲ ثانیه سوم حرکت ($6s < t < 8s$):

$$\begin{array}{l} x = t^2 - 4t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 4s \rightarrow x_1 = 4^2 - 4 \times 4 = 0 \\ t_2 = 6s \rightarrow x_2 = 6^2 - 4 \times 6 = 12 \text{ m} \end{cases} \\ \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 12 - 0 = 12 \text{ m} \end{array}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

۴- شرط به هم رسیدن دو متحرک

فرض کنید معادله مکان - زمان دو متحرک A و B که همزمان شروع به حرکت کردند، به صورت $x_A = 4t + 2$ و $x_B = -5t + 20$ است. شرط به هم رسیدن دو متحرک آن است که مکان دو متحرک یکسان شود و این یعنی داریم:

سوال دو متحرک فوق، در چه مکانی به هم می‌رسند؟

پاسخ

$$t = 2s \xrightarrow[\text{قرار می‌دهیم}]{\text{در یکی از هما}} x_A = 4t + 2 = 4 \times 2 + 2 = 10 \text{ m}$$

در مکان 10 m دو متحرک به هم می‌رسند.

با توجه به خلاصه نکات فوق، مکان متحرک در لحظه $t = 0$ (مبدأ زمان) معادل با مکان اولیه متحرک است. در این سؤال با داشتن معادله‌های مکان دو متحرک،

کافی است به جای t مقدار صفر را قرار دهیم: $A: x_A = 3t^3 - 7t + 5 \xrightarrow{t=0} x_{0,A} = 5 \text{ m}$

B: $x_B = 2 \cos \pi t + 1 \xrightarrow{t=0} x_{0,B} = 2 \cos(0) + 1 = 2 + 1 = 3 \text{ m}$

هشدار

برخی از داوطلبان ممکن است در رابطه $x_B = 2 \cos \pi t + 1$ ، فریب خورده و به اشتباه عدد ۱ را به عنوان $x_{0,B}$ اعلام کنند، در صورتی که با قرار دادن $t = 0$ در عبارت $1, 2 \cos \pi t + 1$ ، به عدد ۳ می‌رسیم!

* اگر بخواهیم بازه‌های زمانی را دقیق‌تر بنویسیم، ۲ ثانیه اول معادل با $2s \leq t \leq 4s$ و ... می‌باشد که البته این موضوع از اهمیت چندانی برخوردار نیست و معمولاً در کتاب‌های کنکور رعایت نمی‌شود.



برای محاسبه بردار مکان متحرک در لحظه $t = 1s$ ، کافیست ابتدا در معادله مکان - زمان، لحظه $t = 1s$ را جایگذاری کنیم:

$$\text{مکان متحرک در } t=1s \rightarrow x = (1)^3 - 1 + 2 = 2m \xrightarrow{\vec{d}_1 = x \vec{i}} \vec{d}_1 = 2\vec{i}$$

دقت: معادله حرکت یا مکان - زمان معادله‌ای است که از ما مقدار t را گرفته و بلافاصله، موقعیت متحرک نسبت به مبدأ در آن لحظه را می‌دهد.

۱.۸ هشدار

این تست شاید ساده به نظر برسد، اما دارای دام آموزشی است. یعنی شما به جواب $\vec{2}\vec{i}$ می‌رسید و به اشتباه گزینه ۲ را در پاسخ‌نامه وارد کرده و به سادگی نمره منفی می‌گیرید! حدود ۲۰ درصد تست‌های سراسری دارای این‌گونه دام‌های آموزشی هستند.

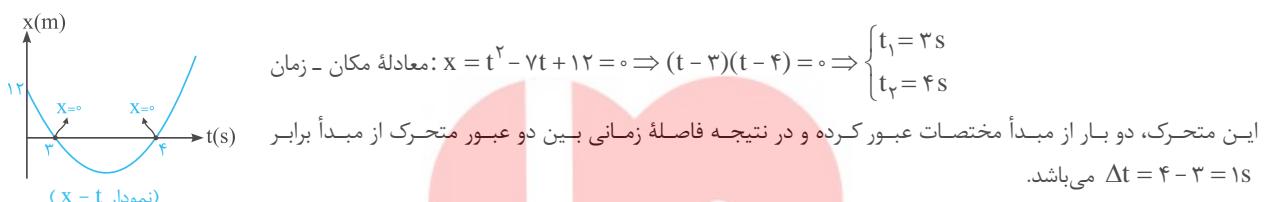
۱.۹

تذکر

لحظه‌ای که مکان یک متحرک صفر باشد ($= 0$ x)، متحرک از مبدأ عبور می‌کند. بنابراین برای یافتن لحظاتی که متحرک از مبدأ مکان عبور می‌کند،

کافی است ریشه‌های معادله حرکت را به دست آوریم.

دقت شود با توجه به این‌که حرکت را در زمان‌های مثبت بررسی می‌کنیم، ریشه‌های منفی قابل قبول نیستند.

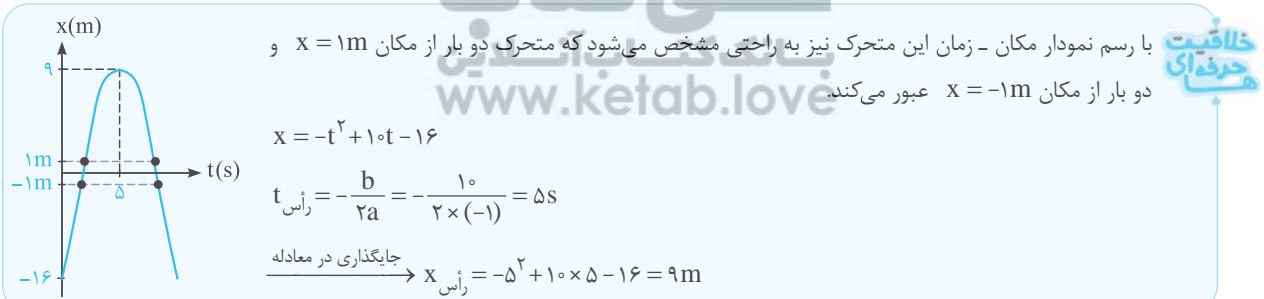


وقتی متحرک در فاصله یک متری از مبدأ مکان قرار دارد، باید در مکان‌های $x = 1m$ یا $x = -1m$ قرار داشته باشد. برای حل این سؤال، باید بررسی کنیم که متحرک چند بار از مکان‌های $x = 1m$ یا $x = -1m$ عبور می‌کند.

$$x = -t^3 + 10t - 16 \Rightarrow \begin{cases} x = 1m \Rightarrow -t^3 + 10t - 16 = 1 \Rightarrow t^3 - 10t + 17 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 17}}{2} \\ x = -1m \Rightarrow -t^3 + 10t - 16 = -1 \Rightarrow t^3 - 10t + 15 = 0 \Rightarrow t_{3,4} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 15}}{2} \end{cases}$$

دو جواب مثبت و قابل قبول $\Rightarrow t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 17}}{2}$
دو جواب منفی و قابل قبول $\Rightarrow t_{3,4} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \times 15}}{2}$

با توجه به چهار جواب مثبت به دست آمده، متحرک ۴ بار از فاصله یک متری مبدأ مکان عبور می‌کند.



خلاصه این
حرفة‌ای

www.ketab.love

۳.۱۱

تذکر

در حرکت بر روی محور x ، در زمان‌هایی که متحرک از مبدأ مختصات می‌گذرد، مکان آن صفر شده ($= 0$ x) و به عبارت دیگر اندازه بردار مکان آن حداقل می‌شود.

با داشتن معادله مکان - زمان، زمان‌هایی که مکان متحرک صفر می‌شود ($= 0$ x)، به سادگی به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &(\text{زمانی که برای اولین بار متحرک از مبدأ می‌گذرد.}) \quad t_1 = 2s \\ &\Rightarrow x = t^3 - 8t + 8 \quad \text{معادله مکان متحرک} \\ &\Rightarrow x = t^3 - 8t + 8 = 0 \Rightarrow (t-2)(t-4) = 0 \Rightarrow t_1 = 2s, t_2 = 4s \\ &(\text{زمانی که برای دومین بار متحرک از مبدأ می‌گذرد.}) \quad t_2 = 4s \\ &x = 0 \quad \text{شرط صفر شدن مکان متحرک} \\ &\text{بنابراین گزینه (۳) صحیح است.} \end{aligned}$$

با توجه به تمرین (۳) در خلاصه نکات (۲)، گزینه (۱) صحیح است.

۳.۱۲

۱۳) ابتدا باید توجه شود که نیم ثانیه سوم یعنی $t = 1/5S$ و جایه جایی در این بازه زمانی پرایر است یا:

$$x = f(t) - f(t_1) \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \rightarrow x_1 = f - f = 0 \\ t_2 = 1/\Delta s \rightarrow x_2 = f(1/\Delta) - f(1/\Delta) = 1m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = 1m$$

تذکرہ

- $0 < t < \frac{0}{\Delta S} \rightarrow$ يعني $\frac{0}{\Delta S}$ ثانية اول
- $\frac{0}{\Delta S} < t < 1s \rightarrow$ يعني $\frac{0}{\Delta S}$ ثانية دوم
- $1s < t < \frac{1}{\Delta S} \rightarrow$ يعني $\frac{1}{\Delta S}$ ثانية سوم

۵) ثانیه‌های متوالی در حرکت یک متحرک عبارت است از:

۱۴ نقاط ابتدا و انتهای بازه زمانی، هفت ثانیه شروع حرکت، به ترتیب $t_1 = 7S$ و $t_2 = 7S + 7S = 14S$ می‌باشد. نتایج این جایه‌جایی، در این بازه زمانی، پیرامی است:

$$x = \frac{1}{\Delta} + \cos \pi t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{\Delta} + \cos(0) = \frac{1}{\Delta} m \Rightarrow \vec{d}_1 = \frac{1}{\Delta} \vec{i} \\ t_2 = \pi s \rightarrow x_2 = \frac{1}{\Delta} + \cos(\pi) = \frac{1}{\Delta} - \underbrace{\cos \pi}_{-1} = \frac{0}{\Delta} m \Rightarrow \vec{d}_2 = \frac{0}{\Delta} \vec{i} \end{cases}$$

$\vec{d} = \vec{d}_2 - \vec{d}_1 = -\frac{2}{\Delta} \vec{i}$: پردار جایه‌چایی متحرک

پادآوری

$$\cos \underline{2k\pi} = +1 \quad \text{و} \quad \cos \underline{(2k-1)\pi} = -1$$

مضرب زوج مضرب فرد

$$\vec{d}_A = \vec{d}_B \Rightarrow 3t+1 = 2t^2 + t + 1 \Rightarrow 2t = 2t^2 \Rightarrow 2t(t-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$$

۱۵ به عنوان یک نکته اساسی و بسیار مهم، هنگامی که دو متحرک یا به هم می‌رسند، بردار مکان آن‌ها با یکدیگر برای می‌شود. بدین ترتیب داریم:

در ادامه چون در صورت سؤال ذکر شده است که این دو متحرک در کدام لحظه پس از شروع حرکت به هم می‌رسند، $t = 18$ قابل قبول است.

(تیست‌های ۱۶ تا ۳۶)

آشنا، با مفهوم عت متوسط و تجزی، متوجه

第15课

درک مفهوم تندی، متوجه و سرعت متوجه، نک، از فوایده‌های اصلی، ما ته اید، فحیا، هست. فوب روی، این، موضوع تعریک کنید ...

سرعت متوسط: در شکل زیر متحرکی با سرعت متغیر، از نقطه A به سمت نقطه B حرکت می‌کند و پس از گذشت زمان Δt ثانیه، به نقطه B می‌رسد. حال می‌خواهیم بینیم این متحرک با چه سرعت ثابتی از نقطه A تا نقطه B حرکت کند تا مجدداً در همان زمان Δt از A به B برسد. می‌خواهیم با سرعت ثابت v_{av} در همان زمان Δt از A تا B برود. با سرعت متغیر در مدت Δt از A تا B می‌برویم.



این پارامتر، سرعت متوسط نام دارد که به نوعی مقدار متوسطی برای سرعت متحرک در طی لحظات حرکت از نقطه A تا نقطه B محسوب می‌شود. اگر متحرک

روی محور X در حال حرکت باشد، برای محاسبه \vec{v}_{av} کافی است جابه‌جایی \vec{d} را بر زمان انجام آن جابه‌جایی، یعنی Δt تقسیم کیم:

تندی متوسط: به نسبت مسافت طی شده (Δs) به زمان طی مسافت (Δt) تندی متوسط گویند. تندی متوسط را با نماد s_{av} نشان می‌دهند و برای محاسبه s_{av} داریم:

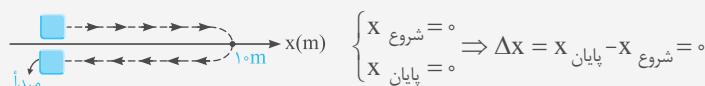
$$S_{av} = \frac{1}{\Delta t}$$

محاسبة داريم: s_{av}

نکات مهم و کاربردی

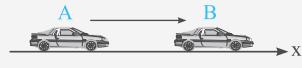
۱ سرعت متوسط مانند جایه‌جایی کمیتی برداری و تندی متوسط مانند مسافت، کمیتی عددی (نرده‌ای) می‌باشد.

اگر جایه جایی متحرک در طی انجام یک حرکت صفر شود، سرعت متوسط آن نیز صفر می‌شود. به طور مثال در حرکت زیر که متحرک ابتدا 10 m در جهت محور X حرکت کرده و سپس 10 m در خلاف جهت محور X حرکت کرده و به محل اولیه خود بازمی‌گردد، سرعت متوسط در کل زمان



اگر یک متحرک در جهت محور X جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن مثبت بوده و اگر در خلاف جهت محور X جابه‌جا شود، جابه‌جایی و سرعت متوسط آن منفی است.

تندی متوسط همواره بزرگتر یا مساوی صفر است. به عبارت دیگر تندی متوسط زمانی برابر صفر می‌شود که متحرک ساکن باشد.

 فرض کنید مطابق شکل مقابل متحرکی روی محور X از نقطه A تا نقطه B بدون تغییر جهت جابه‌جا شود. در این حالت چون مسافت طی شده برابر اندازه جابه‌جایی است، تندی متوسط برابر اندازه سرعت متوسط می‌شود. $s_{av} = |\vec{v}_{av}|$

حالا برای تو دو تمرین بعد، بینیم په بوری از نکاتی که یاد گرفتیم میشه توی هل مسائل استفاده کرد ...

تمرین ۱ معادله حرکت متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند، در SI به صورت $x = 0/25 + \sin \pi t$ می‌باشد. اندازه سرعت متوسط آن در ۵ ثانیه اول حرکت چند متر بر ثانیه است؟

۰/۱۵ (۴)

۰/۲۵ (۳)

۰/۰۵ (۲)

(۱) صفر

پاسخ برای محاسبه سرعت متوسط در ۵ ثانیه اول حرکت، کافیست مکان متحرک در لحظات $t_1 = ۰$ و $t_2 = ۵s$ را به دست آوریم: $x = 0/25 + \sin \pi t$ ، $(0 < t < 5s) \rightarrow |\vec{v}_{av}| = ?$

 بنابراین گزینه (۱) صحیح است. $\vec{v}_{av} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{\Delta t} \hat{i} = \frac{0/25 - 0/25}{5 - 0} \hat{i} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = ۰$

دقت: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، هرگاه جابه‌جایی متحرک برابر صفر شود، سرعت متوسط متحرک نیز برابر صفر می‌شود.

تمرین ۲ مطابق شکل، اتومبیلی روی محور X از نقطه **A** شروع به حرکت کرده و در مدت $6s$ به نقطه **B** رفته و سپس در مدت $4s$ از نقطه **B** به نقطه **C** می‌رود. کدام عبارت در مورد این حرکت نادرست است؟

(۱) این اتومبیل به طور متوسط در هر ثانیه $5m$ از مسیر را پیموده است.

(۲) این اتومبیل به طور متوسط در هر ثانیه $3m$ از نقطه **A** به مقصد نزدیک شده است.

(۳) تندی متوسط این اتومبیل $5m/s$ است.

(۴) اندازه سرعت متوسط این اتومبیل $15m/s$ است.

پاسخ این اتومبیل از نقطه **A** تا **B**، مسافت $m = 40$ را طی کرده و سپس از نقطه **B** تا **C**، به اندازه مسافت $m = 10$ برگشته است. بنابراین در مجموع مسافت طی شده توسط اتومبیل $50m$ می‌شود و تندی متوسط به صورت زیر به دست می‌آید:

بنابراین تندی متوسط $5m/s$ می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه، به طور متوسط $5m$ از مسیر را طی کرده است.

در ادامه سرعت متوسط اتومبیل را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

بنابراین اندازه سرعت متوسط $3m$ می‌شود و مفهوم فیزیکی آن، یعنی اتومبیل در هر ثانیه به طور متوسط $3m$ از نقطه **A** به سمت مقصد، یعنی نقطه **C** نزدیک شده است، پس گزینه (۴) عبارت نادرستی است.

ذکر برای تبدیل km/h به m/s ، کافی است عدد موردنظر را بر $3/6$ تقسیم کنیم:

$$1\text{ km/h} = \frac{(1000\text{ m})}{(3600\text{ s})} \Rightarrow 1\text{ km/h} = \frac{1}{3/6}\text{ m/s}$$

و برای تبدیل m/s به km/h ، عدد موردنظر را در $3/6$ ضرب می‌کنیم:

$$1\text{ m/s} = 3/6\text{ km/h}$$

سرعت متوسط یک متحرک، معادل با نسبت جابه‌جایی به مدت زمان انجام آن جابه‌جایی بوده و با توجه به رابطه زیر به دست می‌آید و عبارت مطرح شده در گزینه (۱) نادرست است.

* به عنوان تمرین، درستی سایر گزینه‌ها را بررسی کنید.

۱۷ همان‌طور که در خلاصه نکات (۳) مشاهده کردید، اگر متحرک بر روی یک خط راست و بدون تغییر جهت جابه‌جا شود، اندازه سرعت متوسط و

تندی متوسط آن بمسان است، بنابراین گزینه (۱) صحیح است.



۱۵

فصل اول: حرکت بر خط راست

۳ ۱۸

عبارت (الف) صحیح است.

علت نادرستی عبارت‌های

(ب)

(ج)

(د)

(ه)

به صورت زیر است:

ب) ممکن است متوجه پس از طی مسافتی به محل اولیه‌اش بازگردد. در این صورت سرعت متوسط آن صفر، اما تندی متوسط آن مخالف صفر است.

ج) در یک مسیر منحنی، مسافت طی شده متوجه، می‌تواند بزرگ‌تر از اندازه جابه‌جایی باشد و در نتیجه تندی متوسط نیز می‌تواند بزرگ‌تر از اندازه سرعت متوسط شود.

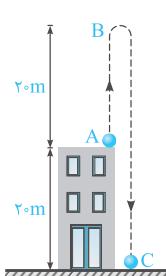
د) چون مسافت طی شده همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه جابه‌جایی است، تندی متوسط نیز همواره بزرگ‌تر یا مساوی اندازه سرعت متوسط است.

ه) چون مسافت طی شده نمی‌تواند منفی باشد، تندی متوسط نیز نمی‌تواند منفی باشد.

۱ ۱۹ متوجه ابتدا به اندازه 15 m از A به B رفته و سپس 5 m به C می‌رود، بنابراین کل مسافت طی شده متوجه برابر 20 m می‌شود. از طرف دیگر اندازه جابه‌جایی متوجه از نقطه A تا C، برابر فاصله $AC = 10\text{ m}$ بوده و برابر $\Delta x = 10\text{ m}$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{1}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{10} = 2$$

به موارد زیر توجه کنید:



۱) همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، گلوله حداقل ترا ارتفاع 40 m از سطح زمین بالا می‌رود. بنابراین از لحظه شروع حرکت تا نقطه B، گلوله به اندازه 20 m به سمت بالا می‌رود و در ادامه از نقطه B تا C گلوله 40 m پایین می‌آید. بنابراین گلوله در مجموع مسافتی به اندازه 60 m را طی می‌کند.

۲) اندازه جابه‌جایی آن از نقطه A تا C برابر 20 m می‌شود و داریم:

$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{1}{\Delta t}}{\frac{|\Delta y|}{\Delta t}} = \frac{1}{|\Delta y|} = \frac{1}{60} = \frac{1}{20} = 3$$

در رابطه با حرکت این متوجه، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) متوجه ابتدا 20 m در جهت محور X حرکت کرده (از A تا B) و سپس 10 m در خلاف جهت محور X حرکت کرده (از B تا C) و مجموعاً 30 m مسافت پیموده شده است، از طرفی جابه‌جایی این متوجه، برابر $d = +10\text{ m}$ است.

۲) متوجه همیشه در مکان‌های مثبت قرار داشته و این یعنی بردار مکان آن همیشه در جهت محور X می‌باشد. (فریب برگشت متوجه در B را نفهمید).

۳) اندازه سرعت متوسط متوجه برابر است با:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{10}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = 1\text{ m/s}$$

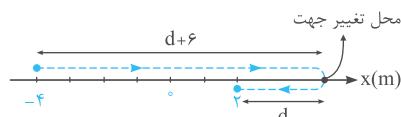
کل زمان لازم برای رسیدن از نقطه A تا C

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{30}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = 3\text{ m/s}$$

دقیق شود که زمان طی کردن مسیر AB برابر $7/5\text{ s}$ و زمان طی کردن مسیر BC برابر $2/5\text{ s}$ است و کل زمان لازم برای طی کردن مسیر A تا C برابر 10 s می‌باشد. با توجه به توضیحات داده شده، گزینه (۳) نادرست است.

۴) این تست، یک سؤال جالب می‌باشد، طبق صورت سؤال، جسم فقط یک بار تغییر جهت داده و در یک باره زمانی مشخص، تندی متوسط آن، برابر اندازه سرعت متوسط آن است. این موضوع یعنی مسافت طی شده متوجه، 4 برابر اندازه جابه‌جایی اش است. این سؤال دو حالت دارد:

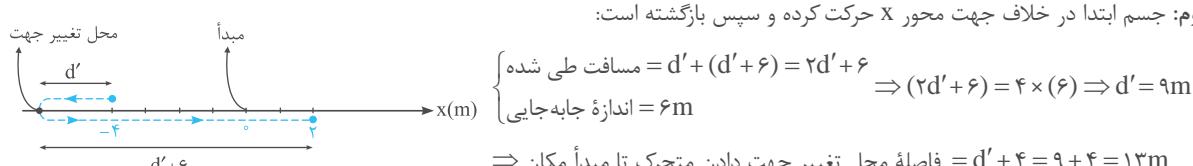
حالات اول: جسم ابتدا در جهت مثبت محور X حرکت کرده و سپس بازگشته است:



$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} \\ \text{اندازه جابه‌جایی} \end{cases} = (d+6) + d = 2d+6 \Rightarrow (2d+6) = 4 \times (6) \Rightarrow d = 6\text{ m}$$

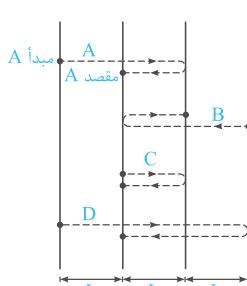
$\rightarrow d+2 = d+6 = 11\text{ m}$ = فاصله محل تغییر جهت دادن تا مبدأ مکان

حالات دوم: جسم ابتدا در خلاف جهت محور X حرکت کرده و سپس بازگشته است:



$$\begin{cases} \text{مسافت طی شده} \\ \text{اندازه جابه‌جایی} \end{cases} = d' + (d'+6) = 2d' + 6 \Rightarrow (2d'+6) = 4 \times (6) \Rightarrow d' = 6\text{ m}$$

$\rightarrow d'+4 = d'+6 = 13\text{ m}$ = فاصله محل تغییر جهت دادن متوجه تا مبدأ مکان



۴ ۲۳ گام اول: ابتدا اندازه جابه‌جایی هر متحرک را به دست می‌آوریم. با توجه به این‌که زمان حرکت برای هر چهار

متحرک یکسان است، برای مقایسه اندازه سرعت متوسط آن‌ها، کافی است اندازه جابه‌جایی آن‌ها (فاصله مبدأ از مقصد) را با یکدیگر مقایسه کنیم:

$$|\vec{d}_A| = L, |\vec{d}_B| = L, |\vec{d}_C| = L, |\vec{d}_D| = L$$

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان است}} v_{av_A} = v_{av_B} = v_{av_D} > v_{av_C}$$

بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست هستند.

گام دوم: در ادامه مسافت‌های طی شده (که معادل با طول خط‌چین برای هر متحرک است) توسط هر چهار متحرک را

به دست می‌آوریم و به کمک آن‌ها تندی متوسط را مقایسه می‌کنیم:

$$l_A = 2L, l_B = 2L, l_C = 2L, l_D = 5L$$

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان است}} s_{av_D} > s_{av_A} = s_{av_B} > s_{av_C}$$

۴ ۲۴ مطابق تعريف، سرعت متوسط یک متحرک که بر روی یک خط راست (محور x) حرکت می‌کند، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \vec{i} \quad \text{سرعت متوسط}$$

$$\begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow x_1 = \lambda m \\ t_2 = 10s \rightarrow x_2 = -16m \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{-16 - \lambda}{10 - 2} \vec{i} = -3\vec{i} \quad (\text{SI})$$

علامت منفی برای سرعت متوسط، یعنی بدار سرعت متوسط (و همچنین جابه‌جایی (d)) در این بازه زمانی در خلاف جهت محور x است.

۴ ۲۵ طبق صورت سؤال، متحرک در لحظه $t = 0$ ، در مکان $x = -40m$ و در لحظه $t = 10s$ ، در مکان $x = 20m$ قرار دارد. بنابراین سرعت

$$\begin{cases} t_0 = 0 \rightarrow x_0 = -40m \\ t_2 = 10s \rightarrow x_2 = +20m \end{cases} \rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} = \frac{20 - (-40)}{10 - 0} = 6 \text{ m/s}$$

۴ ۲۶ با توجه به جدول داده شده، می‌توان نوشت:

سرعت متوسط	Jabeh-Jayi	مکان پایانی	مکان آغازین	
$(\vec{v}_{av})_A$	$(-5 \text{ m}) \vec{i}$	$(-2 \text{ m}) \vec{i}$	\vec{d}_A	متحرک A
$(\vec{v}_{av})_B$	\vec{d}_B	$(8 \text{ m}) \vec{i}$	$(2 \text{ m}) \vec{i}$	متحرک B

$$\vec{d}_A = -5\vec{i} = -2\vec{i} - d_A \Rightarrow d_A = 3\vec{i}$$

$$\vec{d}_B = 8\vec{i} - 2\vec{i} = 6\vec{i}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{d}_B}{d_A} = \frac{6\vec{i}}{3\vec{i}} = 2$$

از طرفی با توجه به این‌که حرکت هر دو متحرک در مدت زمان انجام شده است، نسبت سرعت متوسط دو متحرک برابر نسبت جابه‌جایی آن‌ها است.

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{d}}{\Delta t} \xrightarrow{\text{یکسان}} \frac{(\vec{v}_{av})_A}{(\vec{v}_{av})_B} = \frac{\vec{d}_A}{\vec{d}_B} = \frac{-5\vec{i}}{6\vec{i}} = -\frac{5}{6}$$

۴ ۲۷ در صورتی‌که یک حرکت در چند مرحله انجام شود، سرعت متوسط متحرک در کل مسیر حرکت برابر است با:

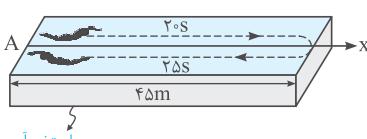


$$\vec{v}_{av, \text{کل}} = \frac{\text{جابه‌جایی کل}}{\text{کل زمان انجام جابه‌جایی}}$$

$$\vec{v}_{av, \text{کل}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \vec{i} = \frac{(-5.00) + (5.00)}{2.00 + 3.00} \vec{i} = -16\vec{i}$$

برای این مسئله داریم:

دقت: توجه شود که \vec{d} (Jabeh-Jayi) فاصله بین محل شروع حرکت (B) و محل پایان حرکت (A) است که برابر $\Delta x_1 + \Delta x_2$ می‌باشد.



۴ ۲۸ شناگر پس از ۴۵ ثانية شنا کردن، به مکان اولیه خود برمی‌گردد، بنابراین جابه‌جایی کل آن برابر صفر

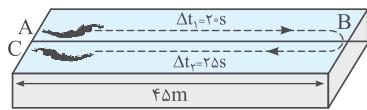
$$\text{بوده و در نتیجه سرعت متوسط کل آن نیز صفر است.} \Rightarrow \Delta x = 0 \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

از طرف دیگر شناگر مسافت $m = 90 \text{ m} = 2 \times 45 \text{ m}$ را شنا کرده است. بنابراین تندی متوسط آن برابر است با:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{90}{20 + 25} = 2 \text{ m/s}$$

در صورتی که جهت مثبت محور X را به سمت راست فرض کنیم، داریم:

۱۲۹

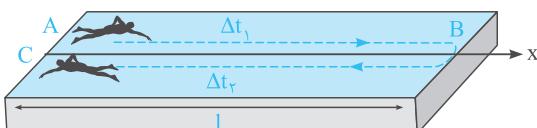


$$\Rightarrow v_{av_1} = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{45}{20} = 2.25 \text{ m/s}$$

$$(BC) \text{ سرعت متوسط در مسیر برگشت} : \Delta x_{\gamma} = x_C - x_B = 0 - 45 = -45 \text{ m} \Rightarrow v_{av\gamma} = \frac{\Delta x_{\gamma}}{\Delta t_{\gamma}} = \frac{-45}{7.5} = -18 \text{ m/s}$$

دقت داشته باشید که در حالت برگشت، شناگر در خلاف جهت محور \times حرکت کرده است و در نتیجه سرعت متوسط آن مقداری منفی است.

۳۰) برای حل این سؤال، به شکل مقابل که مسیر رفت و پرگشت حرکت شناگر



$$(s_{av})_1 = s = \frac{1}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{1}{s} \quad (1)$$

$$(s_{av})_\gamma = \bar{s} = \frac{1}{\Delta t_\gamma} \Rightarrow \Delta t_\gamma = \frac{1}{\bar{s}} \quad (2)$$

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت کل}}{\Delta t} = \frac{\text{زمان کل شناختن}}{\Delta t_1 + \Delta t_2} \Rightarrow s_{av} = \frac{21}{\left(\frac{1}{s}\right) + \left(\frac{1}{2s}\right)} = \frac{21}{\left(\frac{3}{2}\right)s} = \frac{4}{3}s$$

نی اول: متجرک در طول نیم ساعت از حرکت خود، تغیر جهت نداده است، بنابراین جایه جایی آن برای مسافت طی شده، یعنی ۲۷ کیلومتر می باشد.

၃၁



$$\begin{cases} \Delta x = 27 \text{ km} = 27000 \text{ m} \\ \Delta t = 18 \text{ h} = 18 \times 3600 = 18000 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{27000}{18000} = 15 \text{ m/s} = 1500 \text{ cm/s}$$

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{24}{0.8} = 30 \text{ km/h} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{30}{10^3} = 30 \text{ m/s} = 300 \text{ cm/s}$$

روش دوم:

دقیق کنید در این سؤال چون اندازه جایه جایی و مسافت یکسان است، پس اندازه سرعت متوسط برابر تندی متوسط است.

تذکرہ

برای تبدیل km/h به m/s ، کافی است عدد موردنظر را برابر $\frac{1}{3.6}$ تقسیم کنیم:

و برای تبدیل m/s به km/h ، عدد مورد نظر را در $\frac{3}{16}$ ضرب می‌کنیم:

$$1 \text{ m/s} = 3.6 \text{ km/h}$$

برای بهدست آوردن سرعت متوسط یک متحرک، مقدار جایه‌جایی آن ممکن است، نه مسافت طی شده. بنابراین در این سؤال می‌توانیم نشان دهیم که $v = \frac{s}{t}$ و $s = vt$ هم‌سانند.

به عنوان مثال در این مسئله، متحرک می‌تواند ۵ متر به جلو رفته و سپس به جای اول خود برگردد، در این حالت مسافت طی شده برابر 10 m بوده ولی جایه‌جایی آن صفر است (بررسی سایر حالتها را به خودتان می‌سپاریم!).

$$\Delta x = \circ \rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \circ$$

تذکرہ

به عنوان یک موضوع مفهومی، باید گفت که در این سؤال بیشترین مقدار سرعت متوسط متحرک، مربوط به حالتی است که متحرک بدون تغییر جهت، 10 m جابه‌جا شود.

$$\Delta x = 1^\circ m \rightarrow |\vec{v}_{av}|_{max} = \frac{1^\circ}{\tau} = 5 m/s \rightarrow -5 \vec{i} \leq \vec{v}_{av} \leq 5 \vec{i}$$

برای محاسبه انداده سرعت متوسط متحرک در دو ثانیه اول حرکت ($t < 2s$)، ابتدا باید مکان متحرک در لحظات $t_1 = 2s$ و $t_2 = 0$ را

$$\text{معادلة حركة } x = t^4 - 4 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = -4m \\ t_2 = 2s \rightarrow x_2 = 2^4 - 4 = 12m \end{cases} \xrightarrow{\vec{v}_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}} \text{سرعت متوسط: } |\vec{v}_{av}| = \frac{12 - (-4)}{2 - 0} = 8 \text{ m/s}$$

بهدست آوریم:



۲ ۳۴

برای پاسخ به این سؤال، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 4s \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} \times 4^3 - 2 \times 4^2 + 3 \times 4 = \frac{64}{3} - 32 = \frac{4}{3} > 0 \end{cases}$$

سرعت متوسط متحرک در جهت محور x است. بنابراین گزینه (۴)

تذکر

همیشه سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه زمانی، بین بیشترین و کمترین اندازه سرعت لحظه‌ای متحرک در آن بازه می‌باشد. بنابراین گزینه (۴) قطعاً نادرست است.

۱ ۳۵

با توجه به تمرین (۱) در خلاصه نکات (۳)، گزینه (۱) صحیح است.

۲ ۳۶

برای حل این سؤال، گام‌های زیر را طی می‌کنیم.

گام اول: دو ثانیه اول، یعنی از لحظه $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2s$. بنابراین ابتدا مکان متحرک را در این لحظات به دست می‌آوریم:

$$x = kt^2 - 5t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 5m \\ t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = (4k - 5)m \end{cases}$$

گام دوم: از آنجایی که اندازه سرعت متوسط در دو ثانیه اول حرکت برابر صفر شده است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که جایه‌جایی در این بازه زمانی نیز برابر صفر بوده و $x_1 = x_2$ می‌باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow 5 = 4k - 5 \Rightarrow k = 2.5$$

گام سوم: حال مقدار k را در معادله قرار داده و در ادامه مکان متحرک را در لحظات $t_2 = 2s$ و $t_3 = 4s$ به دست می‌آوریم:

$$x = 2.5t^2 - 5t + 5 \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 2s \Rightarrow x_2 = 5m \\ t_3 = 4s \Rightarrow x_3 = 25m \end{cases} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2} = \frac{25 - 5}{2} = 10 \text{ m/s}$$

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

۲ ۳۷

(تست‌های ۳۷ تا ۴۰)

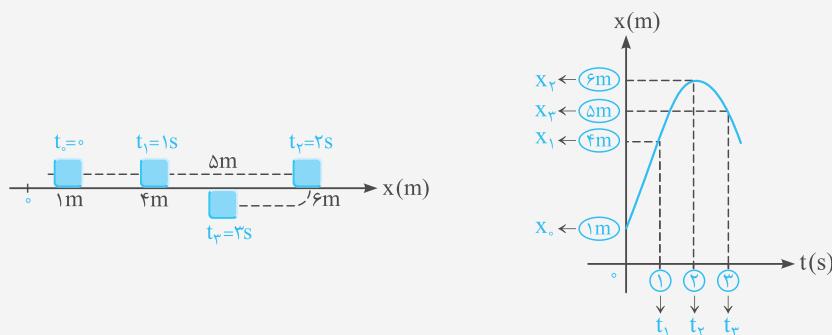
تحلیل نمودار مکان - زمان و محاسبه $|\vec{v}_{av}|$ و s_{av} از روی آن

خلاصه نکات

۱) تحلیل مفهومی نمودار مکان - زمان

فرض کنید مکان متحرکی مطابق شکل، در لحظات $t_1 = 0$ ، $t_2 = 1s$ ، $t_3 = 2s$ و ... داده شده است. اگر این مکان‌ها و زمان‌ها را در یک نمودار ترسیم کنیم، از لحظ مفهومی نمودار مکان - زمان حرکت متحرک به دست می‌آید.

به زیون فرمونی، نمودار مکان - زمان نموداریه که آگه زمان رو از روی مدور افقی (اشته باشی، فیلی راهت مکان رو روی مدور قائم بھت میده):

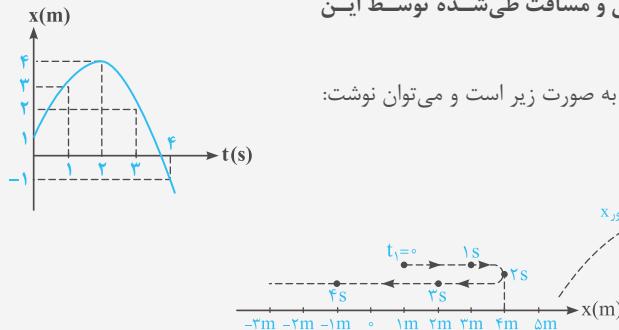


تذکر یک دانش‌آموز خلاق، از روی نمودار مکان - زمان مسیر حرکت متحرک را در ذهن خود تجسم می‌کند. این موضوع یعنی با خود تصور می‌کند که از $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2s$ ، متحرک در جهت محور x حرکت کرده و از مکان $1m$ به مکان $6m$ منتقل می‌شود. در ادامه از $t_2 = 2s$ تا $t_3 = 3s$ در خلاف جهت محور x جایه‌جا شده و از مکان $6m$ به مکان $1m$ رفته است.

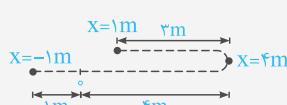
تمرین ۱) نمودار مکان - زمان متحرکی به صورت مقابل است. جایه‌جایی و مسافت طی شده توسط این

متحرک تا پایان ثانیه چهارم، برابر چند متر است؟

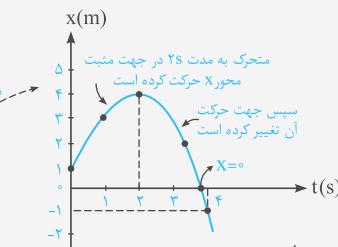
پاسخ با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، مسیر حرکت این متحرک به صورت زیر است و می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ m} \\ t_2 = 4 \text{ s} \Rightarrow x_2 = -1 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 = -1 - 1 = -2 \text{ m}$$



حال به محاسبه مسافت طی شده می‌پردازیم. متحرک ابتدا از $x = 1 \text{ m}$ شروع به حرکت کرده و تا $x = 4 \text{ m}$ رفته است (3 m مسافت طی کرده است). در ادامه از $x = 4 \text{ m}$ شروع به حرکت کرده و به $x = 0$ رفته است (4 m مسافت طی کرده است)، در پایان نیز از $x = 0$ به $x = -1 \text{ m}$ رفته است (1 m مسافت طی کرده است) و مجموع مسافت طی شده توسط متحرک برابر $8 \text{ m} = 3 + 4 + 1$ است.



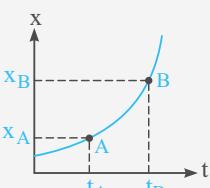
جایه‌جایی این متحرک به صورت زیر است:

(۲) محاسبه سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان

فرض کنید نمودار مکان - زمان را برای یک متحرک در اختیار داریم و سرعت متوسط آن بین دو لحظه t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. در این‌گونه مسائل برای محاسبه سرعت متوسط، از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

روش اول (نمودارخوانی): در این روش ابتدا بر روی نمودار، نقاط A و B را مشخص کرده و مکان متحرک در نقاط A و B را به دست می‌آوریم. در نهایت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{v}_{av}|_{A,B} = \frac{\Delta x_{A,B}}{\Delta t_{A,B}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}$$



روش دوم (شیب بین دو نقطه از نمودار): در این حالت، ابتدا نقاط A و B را روی نمودار مشخص کرده و سپس خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر سرعت متوسط متحرک بین دو لحظه t_A و t_B از حرکت است.

$$\tan \alpha = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = |\vec{v}_{av}|_{\text{مجاور}}$$

این روش در مسائلی که می‌خواهند سرعت متوسط متحرک را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کنند، بسیار کاربرد دارد.

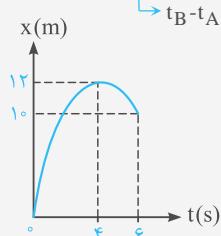
(۳) محاسبه تندی متوسط از روی نمودار مکان - زمان

فرض کنید نمودار مکان - زمان برای یک متحرک را در اختیار داریم و تندی متوسط بین دو لحظه t_A و t_B از حرکت خواسته شده است. برای محاسبه تندی متوسط، گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

گام اول: ابتدا مسافت طی شده بین دو لحظه t_A و t_B را با توجه به نکات ارائه شده محاسبه می‌کنیم:

گام دوم: به کمک رابطه مقابل، تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت طی شده}}{\Delta t}$$



برای به دست آوردن سرعت متوسط از روی نمودار مکان - زمان، فقط باید به مکان ابتداء و انتهای حرکت توجه کنیم. اما برای به دست آوردن تندی متوسط باید کل مسیر طی شده توسط متحرک را به دست آوریم. به طور مثال فرض کنید نمودار مکان - زمان متحرکی که روی محور X حرکت می‌کند، به صورت شکل مقابل باشد. این متحرک از مبدأ مختصات در جهت محور X حرکت کرده در نقطه $X = 12 \text{ m}$ تغییر جهت داده و سپس در خلاف جهت محور X حرکت کرده و به نقطه $X = 10 \text{ m}$ رسید.

(۴) بررسی یک مفهوم بسیار پرکاربرد

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{6} = \frac{5}{3} \text{ m/s}$$

برای بدست آوردن اندازه سرعت متوسط متحرک در ۶ ثانیه اول حرکت داریم:

اما برای بدست آوردن تندی متوسط حرکت باید مسافت طی شده را بدست آوریم. این متحرک ۱۲m در جهت محور x و ۲m در خلاف محور

حرکت کرده است، بنابراین در مجموع مسافت ۱۴m را طی کرده است و داریم:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \text{ m/s}$$



(با افزایش x، y ثابت است.)

۵) سه یادآوری مهم و بسیار کاربردی از ریاضی

الان می‌فرایم به پندر تا نکته ریاضی برای توکل فیزیک دوازدهم، فیلی به کارتون می‌دان...

خطوط افقی دارای شیب صفر هستند.



(با افزایش x، پیش روی نمودار به سمت بالا است.)

(خطوط دارای شیب مثبت)

ساره بکیم خطوطی که سمت راستشون بالاتر از سمت پیشونه، شیشون مثبته و بالگنس ...

خطوطی که دارای عملکردی مشابه با خط $x = -y$ (نیمساز ربع دوم و چهارم) هستند، شیب منفی دارند.

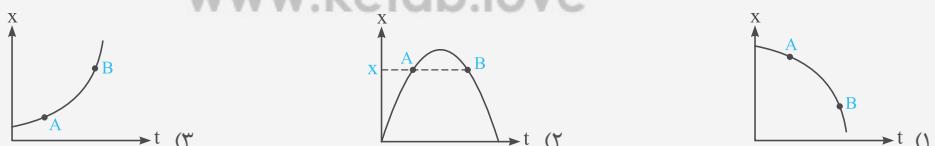


(با افزایش x، پیش روی نمودار به سمت پایین است.)

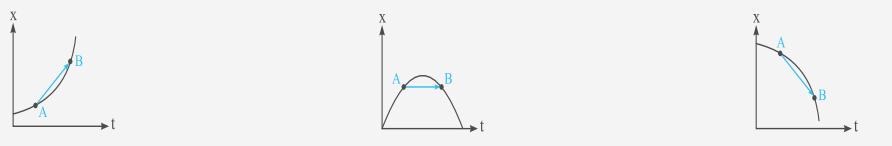
(خطوط دارای شیب منفی)

حالا بکیم با مل پندر تا تمرین، این فلاصله نکات رو بتکرکنیم ...

تمرین ۱ در هر یک از نمودارهای مکان - زمان زیر، علامت سرعت متوسط متحرک از A تا B را مشخص کنید.



با توجه به این که نمودار مکان - زمان برای هر سه متحرک داده شده است، سرعت متوسط برابر شیب خط واصل بین نقاط A و B از نمودار است:



شیب AB مثبت است ($v_{av} > 0$)

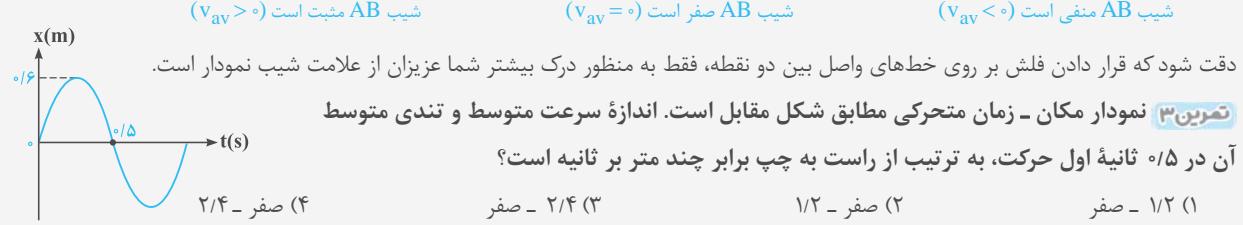
شیب AB صفر است ($v_{av} = 0$)

شیب AB منفی است ($v_{av} < 0$)

دقت شود که قرار دادن فلاش بر روی خطهای واصل بین دو نقطه، فقط به منظور درک بیشتر شما عزیزان از علامت شیب نمودار است.

تمرین ۲ نمودار مکان - زمان متحرکی مطابق شکل مقابل است. اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط

آن در $1/5$ ثانیه اول حرکت، به ترتیب از راست به چپ برابر چند متر بر ثانیه است؟



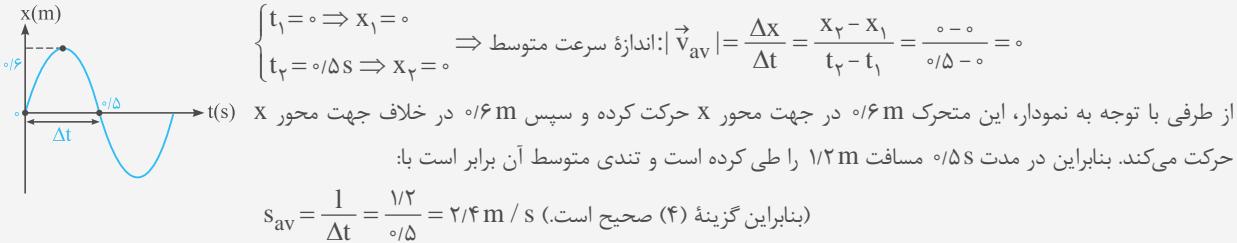
(۱) $1/2$ - صفر (۲) $2/4$ - صفر (۳) $2/4$ - صفر (۴) $2/4$ - صفر



۲۱

فصل اول: حرکت بر خط راست

پاسخ نمودار داده شده نمودار مکان - زمان متوجه است و می خواهیم با خواندن مکان متوجه در $t_1 = 0$ و $t_2 = 0/5\text{ s}$ از روی نمودار، سرعت متوسط در $0/5\text{ s}$ ثانیه اول حرکت را به دست آوریم:



تعربین ۳ نمودار مکان - زمان متوجه کی به صورت سهمی و مطابق شکل رو به رو است. اندازه سرعت متوسط متوجه در کدام بازه زمانی بیشتر است؟ (یا پیشنهاد (۸۵))

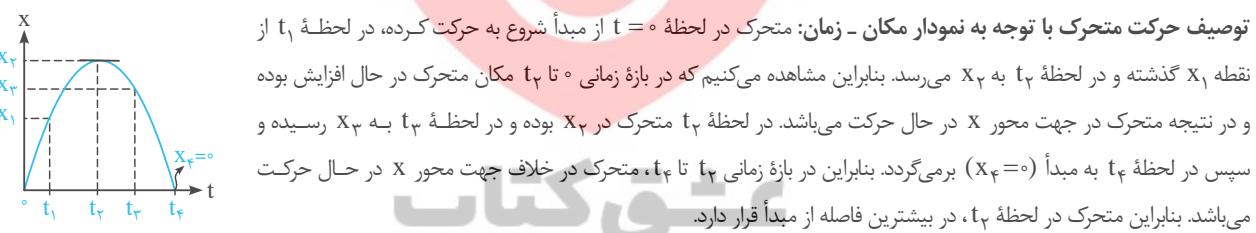


پاسخ سرعت متوسط بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار مکان - زمان مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می کند.

همانطور که در شکل رو به رو مشاهده می کنید، شیب پاره خط BC از سایر پاره خطها بیشتر است (تمایل آن به قائم شدن بیشتر است)، بنابراین سرعت متوسط متوجه در بازه زمانی t_2 تا t_3 بزرگتر است.

$\tan \alpha_{BC} > \tan \alpha_{AC} > \tan \alpha_{OA} \Rightarrow |\vec{v}_{av}|_{BC} > |\vec{v}_{av}|_{AC} > |\vec{v}_{av}|_{OA}$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

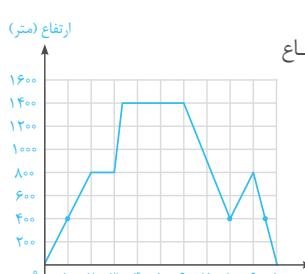


درک بهتر

متوجه از مبدأ مختصات در جهت مثبت محور X حرکت می کند و در لحظه t_1 تغییر جهت دارد و در لحظه t_4 مجدداً به مکان اولیه خود بازمی گردد، در نتیجه در لحظه t_4 ، متوجه در لحظه t_1 ، بیشترین فاصله را از مبدأ دارد.

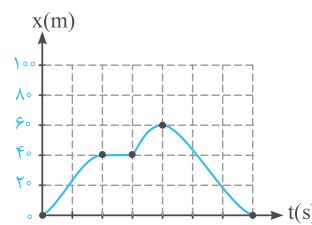
۴ ۳۸ در نمودار مکان - زمان ارائه شده، مکان متوجه صفر یا مثبت بوده و بردار مکان \vec{r} هیچ گاه در خلاف جهت محور X قرار نمی گیرد. بنابراین گزینه (۴) با توضیحات ارائه شده در مورد این نمودار مطابقت دارد.

۴ ۳۹ با توجه به نمودار مکان - زمان مقابل، هوایپیما در سه لحظه $t = 10\text{ s}$, $t = 80\text{ s}$ و $t = 95\text{ s}$ در ارتفاع 400 m از سطح زمین قرار دارد و این تنها ارتفاعی است که به ازاء آن سه زمان وجود دارد.



هوایپیما در بین دقایق ۲۰ تا ۳۰، به مدت ۱۰ دقیقه در ارتفاع ۸۰۰ متر قرار دارد و این ارتفاع نمی تواند گزینه درست باشد.





با توجه به شکل مقابل، حرکت این متحرک را در هر مرحله به صورت جداگانه بررسی می‌کنیم:

۴۴۰ $t < 4s$: همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در این بازه زمانی، باگذشت زمان مکان متحرک در حال افزایش بوده و از $x = 40\text{ m}$ رسیده است. با توجه به این موضوع، متحرک در حال دور شدن از مبدأ است.

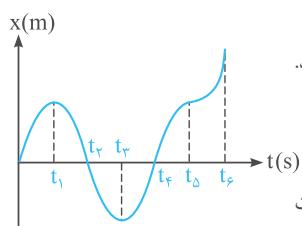
$4s \leq t < 6s$: در این بازه، متحرک در مکان $x = 40\text{ m}$ ایستاده و حرکت نمی‌کند (دققت شود که باگذشت زمان، مکان متحرک عوض نمی‌شود و X ثابت است).

$6s \leq t < 8s$: در این بازه همانند بازه اول، متحرک در جهت محور X در حال حرکت می‌باشد و از مکان $x = 60\text{ m}$ به مکان $x = 40\text{ m}$ رفته و از مبدأ دور می‌شود و در $t = 8s$ به بیشترین فاصله از مبدأ می‌رسد.

$8s \leq t < 14s$: در این بازه باگذشت زمان، متحرک از مکان $x = 60\text{ m}$ به سمت مبدأ ($x = 0$) در حال حرکت بوده و در لحظه $t = 14s$ به مبدأ ($x = 0$) می‌رسد، در نتیجه متحرک در این بازه به مبدأ نزدیک می‌شود.

دققت: متحرک در چهار ثانیه دوم حرکت ($4s \leq t < 8s$) از مکان $x = 40\text{ m}$ به مکان $x = 60\text{ m}$ رفته است و 20 m جابه‌جا شده و گزینه (۴) عبارت نادرستی است.

۳۴۱ چون دوچرخه‌سوار از مکان $x = 0$ شروع به حرکت کرده و در نهایت به $x = 0$ بازگشته است، اندازه جابه‌جایی آن صفر می‌باشد. از طرف دیگر دوچرخه‌سوار در ۸ ثانیه اول حرکت از $x = 0$ به $x = 60\text{ m}$ رفته و در بازه زمانی $8s$ تا $14s$ از $x = 60\text{ m}$ به $x = 0$ بازگشته است و در مجموع مسافت 120 m را طی کرده است.



برای حل، درستی تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) در بازه زمانی t_2 تا t_3 ، متحرک در خلاف جهت محور X حرکت کرده و در حال دور شدن از مبدأ می‌باشد. بنابراین عبارت مطرح شده در گزینه (۱) نادرست است.

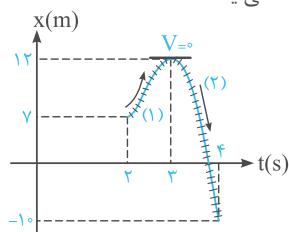
(۲) در بازه زمانی t_4 تا t_5 ، متحرک در جهت محور X از مبدأ دور می‌شود.

(۳) در بازه زمانی t_2 تا t_4 ، متحرک در قسمت منفی محور X قرار دارد و در لحظه t_3 بیشترین فاصله را در قسمت منفی محور X از مبدأ دارد.

(۴) هنگامی که متحرک در قسمت مثبت محور X است، بردار مکان در جهت محور X و هنگامی که متحرک در قسمت منفی محور X است، بردار مکان در خلاف جهت محور X قرار دارد.

به طور کلی هنگامی که متحرک از $x = 0$ عبور کرده و علامت X تغییر جهت می‌دهد. متحرک مورد نظر در دو لحظه t_2 و t_4 از مبدأ مکان عبور کرده است و دو بار مکان آن تغییر جهت می‌دهد. بنابراین تنها گزینه (۱) عبارت نادرستی است.

۱۴۳ با بررسی جهت حرکت و اندازه جابه‌جایی در دو ثانیه دوم حرکت ($4s \leq t < 8s$)، مسافت طی شده به دست می‌آید.



مرحله اول: از لحظه $t = 2s$ تا $t = 3s$ ، متحرک در جهت مثبت محور X حرکت کرده و مسافت $1_1 = 12 - 7 = 5\text{ m}$ را پیموده است.

مرحله دوم: از لحظه $t = 3s$ تا $t = 4s$ ، متحرک در خلاف جهت محور X حرکت کرده و مسافت $1_2 = 22 - 12 = 10\text{ m}$ را پیموده است.

بنابراین مسافت طی شده در دو ثانیه دوم برابر $1_1 + 1_2 = 27\text{ m}$ است.

سوال اندازه جابه‌جایی متحرک در دو ثانیه دوم حرکت چند متر است؟

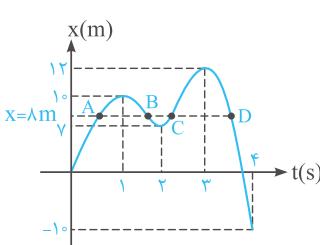
پاسخ

سوال در طی حرکت، بردار مکان در کدام بازه زمانی تغییر جهت می‌دهد؟

پاسخ در ثانیه چهارم ($3s \leq t < 4s$ ، متحرک از مبدأ عبور کرده و علامت X تغییر می‌کند، بنابراین بردار مکان متحرک در این بازه زمانی تغییر جهت می‌دهد.

۴۴۴ با توجه به نمودار داده شده، متحرک ۴ بار در مکان $x = +8\text{ m}$ قرار گرفته است (در واقع خط افقی که از $x = 8\text{ m}$ رسم می‌شود، نمودار را در چهار نقطه A, B, C و D قطع می‌کند)، بنابراین ۴ بار بردار مکان متحرک بر حسب متر برابر $\vec{d} = +8\text{ m}$ می‌شود.

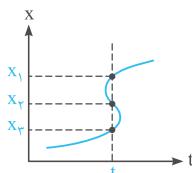
$$\begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow x_1 = 7\text{ m} \\ t_2 = 4s \rightarrow x_2 = -10\text{ m} \end{cases} \rightarrow |\vec{d}| = |x_2 - x_1| = 17\text{ m}$$





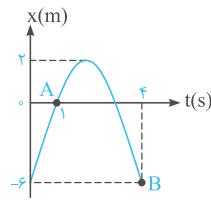
فصل اول: حرکت بر خط راست

۲۳



نمودار رسم شده در گزینه (۴)، نمودار یکتابع x برحسب t نمی‌تواند باشد. به عبارت دیگر، اگر یک خط موازی محور X رسم کنیم، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. این موضوع نشان‌دهنده این است که متحرک در یک لحظه، در چند مکان مختلف قرار دارد که این موضوع امکان‌پذیر نیست.

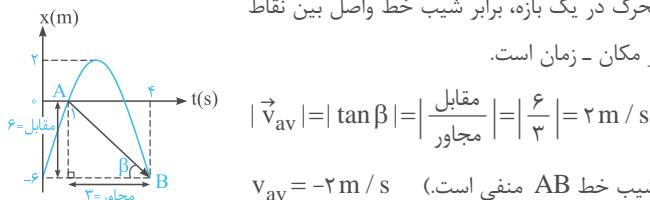
روش اول (نمودارخوانی): با توجه به نمودار مکان – زمان داده شده، متحرک در لحظه $t_1 = 1s$ در مبدأ قرار



داشته ($x_A = 0$) و در لحظه $t_2 = 4s$ در مکان $x_2 = -6m$ قرار دارد و داریم:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-6 - 0}{4 - 1} = -2 \text{ m/s}$$

روش دوم (شیب نمودار): سرعت متوسط متحرک در یک بازه، برابر شیب خط وصل بین نقاط ابتدای بازه زمانی و انتهای بازه زمانی در نمودار مکان – زمان است.

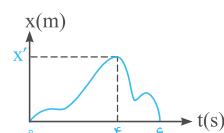


$$v_{av} = -2 \text{ m/s} \quad (\text{شیب خط AB منفی است}).$$

دقت

با توجه به جهت فلاش AB در این سؤال، علامت v در نمودار مکان – زمان فوق مشخص می‌شود:

→ $\Rightarrow v_{av} = 0$	↗ $\Rightarrow v_{av} > 0$	↘ $\Rightarrow v_{av} < 0$
----------------------------	----------------------------	----------------------------



$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = 4s \rightarrow x_2 = x' \\ t_3 = 6s \rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x' - 0}{4 - 0} = \frac{x'}{4}$$

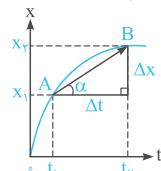
محاسبه سرعت متوسط از $t_1 = 0$ تا $t_2 = 4s$

محاسبه سرعت متوسط از $t_2 = 4s$ تا $t_3 = 6s$

$$\begin{cases} t_2 = 4s \rightarrow x_2 = x' \\ t_3 = 6s \rightarrow x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_{av} = \frac{0 - x'}{6 - 4} = -\frac{x'}{2}$$

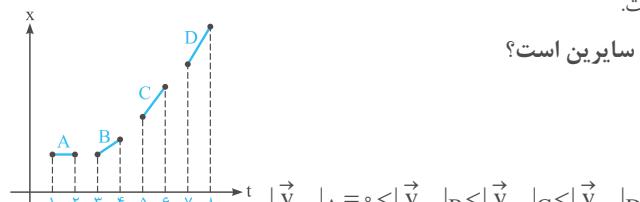
و نسبت سرعت متوسط در این دو بازه زمانی برابر است با:

$$\frac{v_{av_1}}{v_{av_2}} = \frac{\frac{x'}{4}}{-\frac{x'}{2}} = -\frac{1}{2}$$



نمودار داده شده یک نمودار مکان – زمان است. بنابراین شیب خط وصل دو نقطه از نمودار مکان – زمان، بیانگر سرعت متوسط در فاصله زمانی بین آن دو لحظه (t_1 تا t_2) می‌باشد.

$$AB \text{ شیب} = \tan \alpha = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = |\vec{v}_{av}|$$



با توجه به تمرین (۴) در خلاصه نکات (۴)، گزینه (۳) صحیح است.

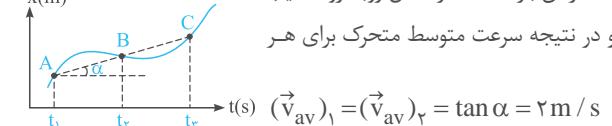
تمرین: در شکل مقابل، اندازه سرعت متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟

پاسخ



شیب خط وصل بین دو نقطه از نمودار مکان – زمان برابر سرعت متوسط در آن بازه است. در شکل رویه‌رو، شیب

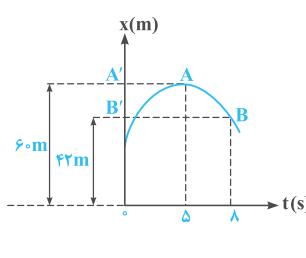
خط وصل بین نقاط A و B با شیب خط وصل بین نقاط B و C یکسان بوده و در نتیجه سرعت متوسط متحرک برای هر دو بازه زمانی (t_1 تا t_2) و (t_2 تا t_3) یکسان و برابر 2 m/s است.



$(\vec{v}_{av})_1 = (\vec{v}_{av})_2 = \tan \alpha = 2 \text{ m/s}$

تذکر

دقت کنید پاره خط‌های AB و BC در یک امتداد قرار دارند و شیب هر دو یکسان است.



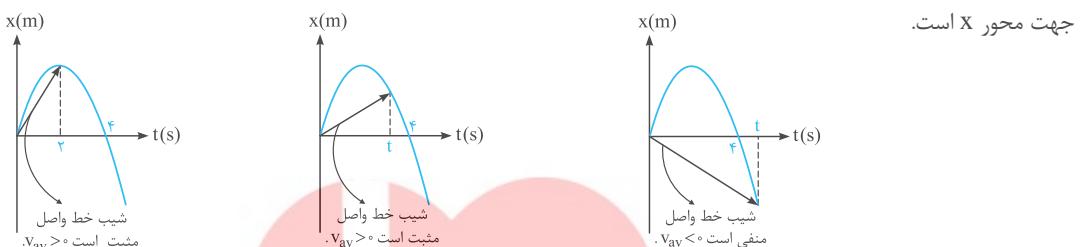
۱ ۵۱ با سؤال بسیار جالب و مفهومی رو به رو شده‌ایم. ابتدا باید دقیق کنیم که متحرک بر روی محور x در حال حرکت است و بردار سرعت متوسط آن یا در جهت محور x است و یا در خلاف جهت آن و این موضوع یعنی سرعت متوسط در جهت AB نمی‌باشد و گزینه‌های (۲) و (۳) نادرست هستند.

با توجه به نمودار مکان-زمان داده شده، متحرک در لحظه $t_1 = 5\text{s}$ در مکان $A'(x_1 = 6\text{m})$ و در لحظه $t_2 = 8\text{s}$ در مکان $B'(x_2 = 42\text{m})$ قرار دارد و داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{42 - 6}{8 - 5} = -6 \text{ m/s}$$

در ادامه از روی نمودار مشخص است که از لحظه $t = 5\text{s}$ تا $t = 8\text{s}$ متحرک بر روی محور x از A' به طرف B' حرکت کرده و سرعت متوسط در راستای $A'B'$ (یعنی در خلاف جهت محور x) است.

۳ ۵۲ با توجه به شبیه خط واصل از لحظه صفر تا t ، مشاهده می‌شود که نهایتاً تا لحظه $t = 4\text{s}$ ، شبیه خط واصل مثبت و سرعت متوسط متحرک در



۴ ۵۳ متحرک ابتدا 12m در خلاف جهت محور x حرکت کرده و از مکان $x_1 = 4\text{m}$ به مکان $x_2 = -8\text{m}$ میرسد. سپس تغییر جهت داده و با طی مسافت 22m به مکان $x_3 = 14\text{m}$ میرسد و در ادامه دوباره تغییر جهت داده و پس از طی مسافت 14m در لحظه $t = 12\text{s}$ به مبدأ ($x_4 = 0$) میرسد. بنابراین متحرک در مجموع مسافت $12 + 22 + 14 = 48\text{m}$ داریم:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{48}{12} = 4 \text{ m/s}$$

۴ ۵۴ این متحرک از لحظه شروع حرکت تا لحظه t_1 مسافت $(x_0 - x_1)$ را طی کرده است. از طرفی از لحظه t_1 تا t_2 ساکن بوده و از لحظه t_2 تا لحظه t_3 از مکان $x_2 = 5\text{s}$ به مبدأ $x_3 = 8\text{m}$ رسیده است و در نتیجه در این بازه زمانی مسافت 8m را طی کرده است.

$$\text{مجموع مسافت طی شده در طی } 5\text{s} = (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) = 16 - x_1$$

$$s_{av} = \frac{\text{کل مسافت طی شده}}{\text{کل زمان}} \Rightarrow s_{av} = \frac{16 - x_1}{5} \Rightarrow x_1 = 6\text{m}$$

۴ ۵۵ مطابق شکل، فرض می‌کنیم بیشترین فاصله ذره تا مبدأ مکان برابر X باشد، به این ترتیب داریم:

$$1 = (X - 2) = 2X - 2$$

$$| \Delta x | = | X - 2 | = 2\text{m}$$

$$s_{av} = \Delta t | v_{av} | \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} = \frac{| \Delta x |}{\Delta t} \Rightarrow (2X - 2) = 5 \times (2) \Rightarrow 2X = 12 \Rightarrow X = 6\text{m}$$

۴ ۵۶ گام اول: در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 2\text{s}$ متحرک از قسمت منفی محور x به سمت مبدأ حرکت کرده و به مبدأ نزدیک می‌شود، در بازه زمانی $t_2 = 2\text{s}$ تا $t_3 = 6\text{s}$ متحرک از مبدأ دور شده و در نهایت در بازه زمانی $t_3 = 6\text{s}$ تا $t_4 = 10\text{s}$ به مبدأ نزدیک می‌شود.

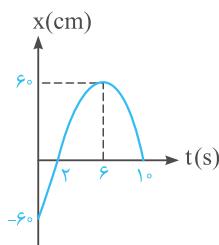
گام دوم: بنابراین تندی متوسط در بازه زمانی $t_2 = 2\text{s}$ تا $t_3 = 6\text{s}$ که متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{6 - 2}{6 - 2} = \frac{6}{4} = 1.5 \text{ cm/s} = 0.15 \text{ m/s}$$



۲۵

فصل اول: حرکت بر خط راست



با توجه به نمودار داده شده، متحرک در دو لحظه $t_1 = 0$ و $t_2 = 6$ s به ترتیب در نقاط $x_1 = -6$ cm و $x_2 = +6$ cm قرار دارد و تنها در این دو لحظه، فاصله متحرک تا مبدأ برابر ۶۰ cm می‌شود. بنابراین باید تندی متوسط متحرک را در ۶ ثانیه اول حرکت به دست آوریم:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{120}{6} = 20 \text{ cm/s} = 0.2 \text{ m/s}$$

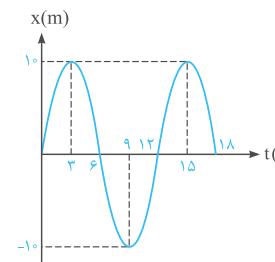
برای پاسخ دادن به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) همان طور که می‌دانید، طبق رابطه $s_{av} = \frac{1}{\Delta t}$ ، تندی متوسط به مسافت طی شده توسط متحرک بستگی دارد.

۲) بعد از لحظه $t = 0$ ، متحرک در جهت محور X شروع به حرکت می‌کند و در ادامه مسیر، مسافت‌های متفاوتی را طی می‌کند، بنابراین مسافت طی شده توسط آن در هیچ‌یک از بازه‌های زمانی صفر نمی‌باشد.

۳) دقت کنید حتی زمانی که متحرک به مکان اولیه خود باز می‌گردد، باز هم مسافت طی شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت صفر نمی‌شود و در این حالت جابه‌جایی و سرعت متوسط حرکت صفر می‌شود.

۴) بنابراین در بازه زمانی $t_1 = 0$ تا $t_2 = 6$ s که متحرک به محل اولیه‌اش باز می‌گردد، سرعت متوسط صفر شده و تندی متوسط در هیچ‌یک از بازه‌های زمانی صفر نمی‌شود.



در بازه t_1 تا t_2 ، مکان متحرک ثابت بوده و این یعنی متحرک حرکت نکرده و مسافت طی شده توسط آن صفر است. بنابراین تندی متوسط متحرک در بازه زمانی t_1 تا t_2 برابر صفر است.

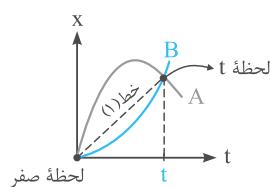
دققت

در بازه زمانی صفر تا t_2 ، سرعت متوسط متحرک برابر صفر است ولی تندی متوسط آن مخالف صفر است (زیرا جابه‌جایی در این بازه زمانی صفر شده ولی مسافت طی شده مخالف صفر است).

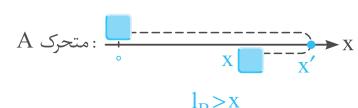
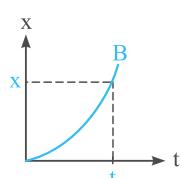
۳۵۹ این سؤال را در دو گام حل می‌کنیم:

گام اول: خط واصل از لحظه صفر تا لحظه t برای دو متحرک یکسان بوده و با توجه به این‌که شیب این خط برابر سرعت متوسط متحرک است، سرعت متوسط دو متحرک از لحظه صفر تا لحظه t یکسان است.

$$\text{شیب خط (۱)}: (v_{av})_A = (v_{av})_B = (1)$$



گام دوم: برای مقایسه تندی متوسط، باید مسافت طی شده توسط دو متحرک از لحظه صفر تا t را مقایسه کنیم و با توجه به این موضوع داریم:



همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مسافت طی شده توسط متحرک A به دلیل تغییر جهت دادن، از جابه‌جایی آن (یعنی x) بیشتر بوده و در مجموع تندی متوسط از A از B بیشتر است.

$$(s_{av}) = \frac{1}{\Delta t} \frac{l_A > l_B}{\Delta t} \rightarrow (s_{av})_A > (s_{av})_B$$

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

۳۶۰ تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای (محاسبه آن از روی نمودار مکان-زمان و تعیین جهت حرکت با کمک آن) (تست‌های ۶۱ تا ۷۸)

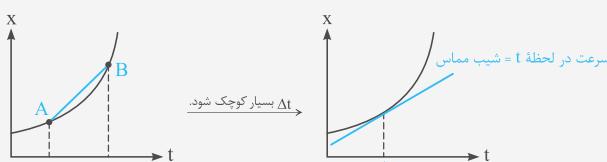
هلا برایم بینیم تندی لحظه‌ای پیه و په اطلاعات مفیدی از ش استخراج می‌شود ...

۱) مفهوم تندی لحظه‌ای و سرعت لحظه‌ای

تندی متحرک در هر لحظه از زمان یا در هر نقطه از مسیر را، تندی لحظه‌ای می‌نامند. اگر هنگام گزارش تندی لحظه‌ای، به جهت حرکت متحرک نیز اشاره شود، در اقع سرعت لحظه‌ای آن را بیان کرده‌ایم. برای مثال وقتی درون خودرویی به طرف شمال در حال حرکت باشید و در نقطه‌ای از مسیر، عقربه تندی سنج خودروی شما روی 100 km/h باشد، در این صورت تندی لحظه‌ای خودرو برابر 100 km/h و سرعت لحظه‌ای آن 100 km/h به طرف شمال است.

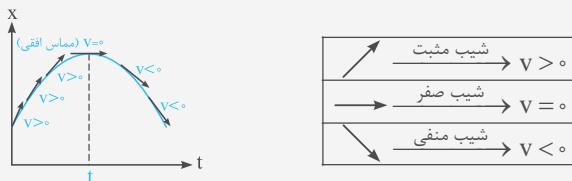
تذکر برای سادگی و بنا به قراردادی که در کتابهای فیزیک به کار می‌رود، سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای را به ترتیب به صورت سرعت و تندی بیان می‌کنند. همچنین سرعت را که کمیتی برداری است با نماد \vec{v} و تندی را که برابر اندازه سرعت و کمیتی نرده‌ای است با نماد v نشان می‌دهند.

۱۲) محاسبه سرعت لحظه‌ای از روی نمودار مکان - زمان



همانطور که می‌دانیم شیب خط وصل بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، برابر سرعت متوسط متحرک است. حال اگر بازه زمانی Δt بسیار کوچک شود، عملاً A و B بر روی هم منطبق شده و شیب خط وصل بین دو نقطه A و B، با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطه A برابر است. این موضوع یعنی شیب مماس ترسیمی بر نمودار مکان - زمان در لحظه t، برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک در این لحظه است.

نکات مهم و کاربردی

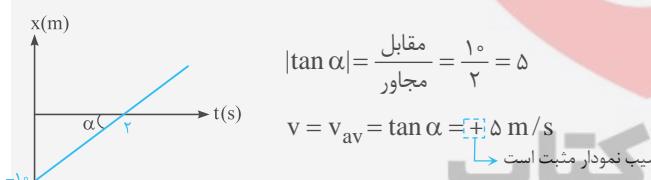


۱) با توجه به شیب مماس‌های ترسیمی در شکل مقابل، سرعت متحرک در ابتداء ثابت بوده، در قله نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد. بنابراین متحرک ابتدا در جهت محور X حرکت می‌کند ($v > 0$)، سپس توقف کرده ($v = 0$) و سپس در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند ($v < 0$).

(قراردادن فلش برای مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است و از نظر علمی برای مماس‌ها نباید جهت بگذاریم.)

۲) عقریه تندی سنج، تندی لحظه‌ای خودرو را نشان می‌دهد و هیچ‌گونه اطلاعی درخصوص جهت حرکت خودرو به ما گزارش نمی‌کند. استفاده از واژه سرعت‌سنج برای این وسیله نادرست است، هر چند در زندگی روزمره معمولاً به اشتباه از این واژه استفاده می‌کنیم.

۳) اگر نمودار مکان - زمان در بازه‌ای از حرکت به صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازه سرعت متحرک در آن بازه زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازه زمانی، برابر سرعت متوسط در آن بازه زمانی است. به عنوان مثال، در نمودار مکان - زمان مقابل، سرعت متوسط در هر بازه زمانی، دلخواه ثابت بوده و برابر سرعت لحظه‌ای (یعنی شیب نمودار) می‌باشد.



این یعنی اگه یه طراح، سرکارتون بزاره و پرسه سرعت در هنگام عبور از مبدأ ۵m/s هندر، باور گنید بازم بواب همون $5m/s + 5m/s$ هستش.

یا هنئی اگه پرسه سرعت متوسط در $1/5$ ثانية سوم ۵m/s هندر، باور گنید بازم بواب همون $5m/s + 5m/s$ هست، احتمالاً باورش سفت بود براتون ☺ ...

تمرین) نمودار مکان - زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، به شکل مقابل است. اگر تندی متحرک در لحظه $t = 10s$ برابر اندازه سرعت متوسط آن بین دو لحظه $t_1 = 5s$ و $t_2 = 12s$ باشد، متحرک در لحظه $t = 12s$ در چند متری مبدأ می‌باشد؟

۲۴) ۲

۲۰) ۴

۲۸) ۱

۳۶) ۳

پاسخ) برای پاسخ دادن به این سوال، به موارد زیر توجه کنید:

۱) طبق صورت سوال، تندی متحرک در لحظه $t = 10s$ ، برابر اندازه سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 12s$ است و داریم:

$$t = 10s \quad \text{در لحظه } t = 10s \quad \text{در لحظه } t = 10s \quad \text{تندی در لحظه } t = 10s \quad v = \tan \alpha = \frac{16}{4} = 4 \text{ m/s}$$

۲) در صورتی که متحرک در لحظه $t = 12s$ در مکان x' باشد، با محاسبه اندازه سرعت متوسط از لحظه ۵s تا ۱۲s داریم:

$$v_{av} = \tan \beta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{x' - 8}{7} = 4 \Rightarrow x' = 36 \text{ m} \quad (\text{گزینه ۳})$$

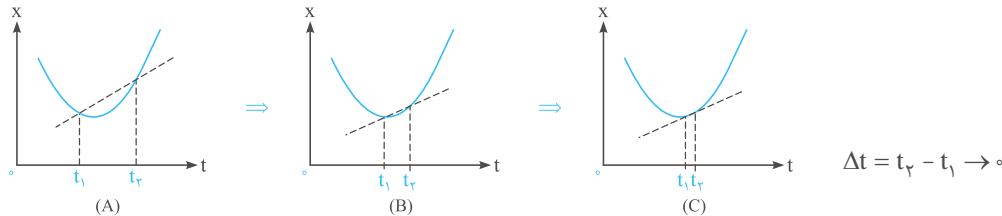
با توجه به مطالب مطرح شده در خلاصه نکات فوق، گزینه (۳) صحیح است.



فصل اول: حرکت بر خط راست

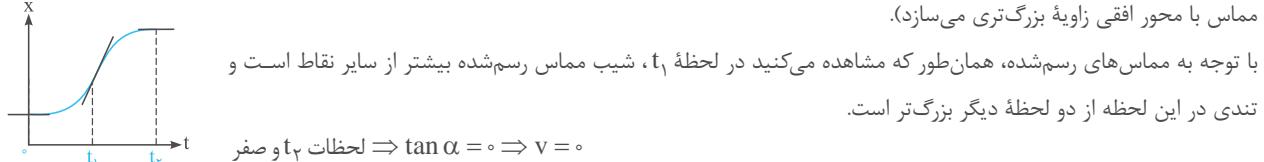
۲۷

همان‌گونه که در شکل‌های زیر مشاهده می‌کنید، با کوچک‌تر شدن بازه زمانی $t_2 - t_1$ ، شیب خط واصل، به سمت مماس رسم شده بر نمودار مکان–زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب خط مماس رسم شده بر هر نقطه از نمودار مکان–زمان، بیانگر اندازه سرعت لحظه‌ای در آن نقطه است.



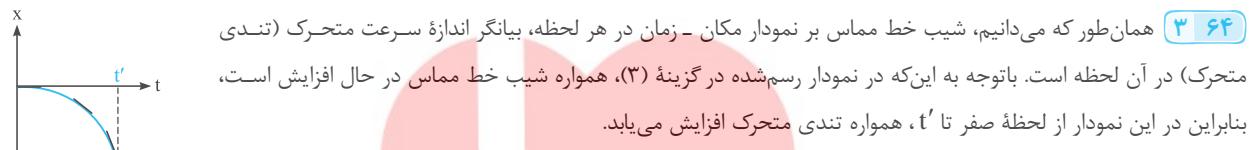
$$\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$$

اندازه سرعت متحرک (تندی) در لحظه‌ای بزرگ‌تر است که شیب مماس رسم شده بر نمودار مکان–زمان در آن نقطه بیشتر باشد (یعنی خط مماس با محور افقی زاویه بزرگ‌تری می‌سازد).



با توجه به مماس‌های رسم شده، همان‌طور که مشاهده می‌کنید در لحظه t_1 ، شیب مماس رسم شده بیشتر از سایر نقاط است و تندي در این لحظه از دو لحظه دیگر بزرگ‌تر است.

$$\text{لحظات } t_2 \text{ و صفر} \Rightarrow \tan \alpha = 0 \Rightarrow v = 0$$



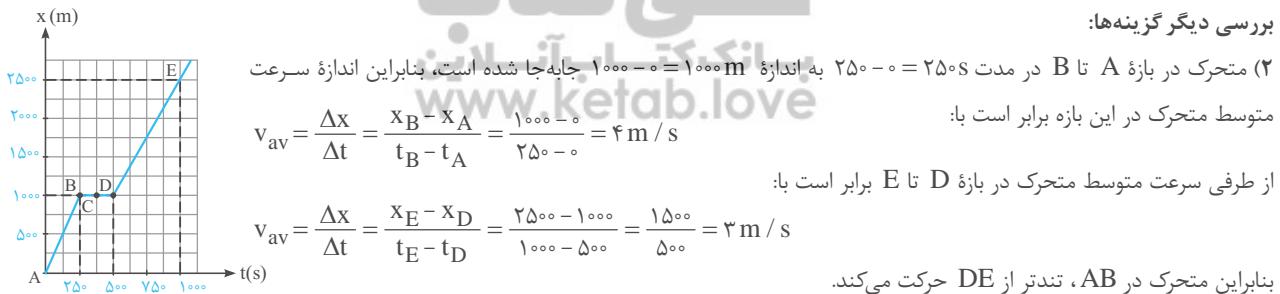
همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط مماس بر نمودار مکان–زمان در هر لحظه، بیانگر اندازه سرعت متحرک (تندی) متحرک) در آن لحظه است. با توجه به این‌که در نمودار رسم شده در گزینه (۳)، همواره شیب خط مماس در حال افزایش است، بنابراین در این نمودار از لحظه صفر تا t' ، همواره تندي متحرک افزایش می‌یابد.

۱۶۵
نکته

اگر نمودار مکان–زمان در بازه‌ای از حرکت به صورت یک خط راست با شیب ثابت و مخالف صفر باشد، اندازه سرعت متحرک در آن بازه زمانی ثابت است و از سوی دیگر، سرعت لحظه‌ای در تمامی لحظات آن بازه زمانی برابر سرعت متوسط در آن بازه زمانی است.

با توجه به نکته ارائه شده، واضح است که شیب DE مقدار ثابتی است و سرعت متحرک در این بازه نیز مقدار ثابتی است. بنابراین سرعت متوسط در هر بازه زمانی قرار گرفته در این بازه (D تا E) برابر سرعت لحظه‌ای در این بازه است. یعنی سرعت متوسط در بازه زمانی $t = 55\text{s}$ برابر سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 55\text{s}$ (یا هر لحظه دیگر که در بازه زمانی 50s تا 100s قرار گرفته باشد) می‌باشد. بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

بررسی دیگر گزینه‌ها:



(۲) برای محاسبه اندازه سرعت متوسط در کل زمان حرکت، نسبت جابه‌جایی کل متحرک را بر کل بازه زمانی به دست می‌آوریم:

$$v_{av, \text{کل}} = \frac{\Delta x_{\text{کل}}}{\Delta t_{\text{کل}}} = \frac{x_E - x_A}{t_E - t_A} = \frac{2500 - 0}{550 - 0} = 45 \text{ m/s}$$

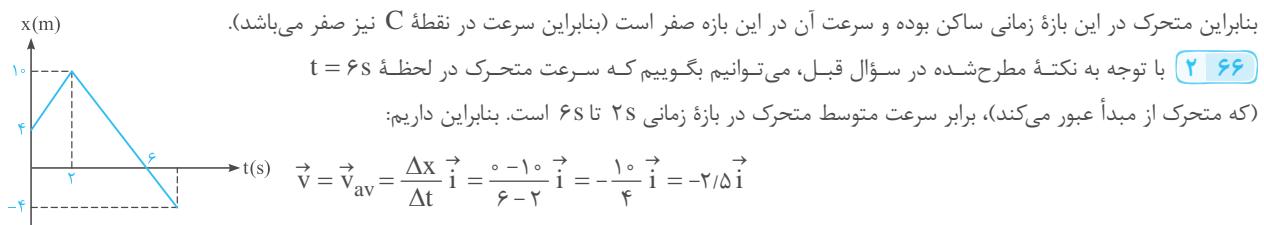
(۴) با توجه به نمودار، مشاهده می‌کنیم که متحرک در تمام لحظات بین $t = 250\text{s}$ تا $t = 500\text{s}$ در مکان $x = 1000\text{m}$ قرار داشته و جابه‌جا نمی‌شود.

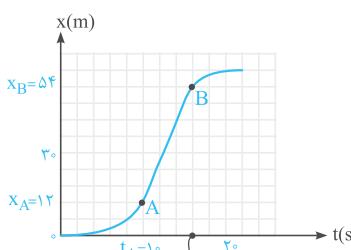
بنابراین متحرک در این بازه زمانی ساکن بوده و سرعت آن در این بازه صفر است (بنابراین سرعت در نقطه C نیز صفر می‌باشد).

با توجه به نکته مطرح شده در سؤال قبل، می‌توانیم بگوییم که سرعت متحرک در لحظه $t = 6\text{s}$

(که متحرک از مبدأ عبور می‌کند)، برابر سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی 2s تا 6s است. بنابراین داریم:

$$\vec{v} = \vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \hat{i} = \frac{(-10 - 10)}{6 - 2} \hat{i} = -\frac{10}{4} \hat{i} = -2.5 \hat{i}$$



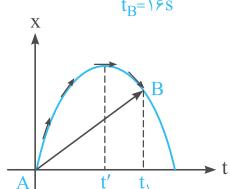


در حرکت این متحرک، از لحظه $t=0$ تا A ، سرعت متحرک در حال افزایش است (شیب مماس ترسیمی بر نمودار در حال افزایش است)، در ادامه از A تا B نمودار مکان - زمان خط صاف بوده و سرعت متحرک ثابت است و در نهایت از B سرعت کاهش یافته و در نهایت به صفر می‌رسد. با توجه به این موضوع، بیشترین سرعت بین A تا B است و کافیست شیب خط AB را بیابیم (هر یک از خانه‌های محور قائم معادل 6 m و هر یک از خانه‌های محور افقی معادل 2 s است):

$$v_{AB} = v_{av_{AB}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = \frac{54 - 12}{18 - 10} = 7 \text{ m/s}$$

با توجه به تمرين (۱) در خلاصه نکات (۵)، گزینه (۳) صحیح است.

۲۶۹ به موارد زیر توجه کنید:



(۱) همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط رسم شده بین دو لحظه $t=0$ و t_1 (خط AB) بیان‌گر سرعت متوسط حرکت جسم می‌باشد. چون شیب خط موردنظر مثبت است، بنابراین سرعت متوسط متحرک در این بازه زمانی مثبت بوده و در جهت مثبت محور x است.

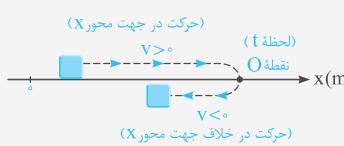
(۲) از طرف دیگر شیب خط مماس بر نمودار در یک لحظه، بیان‌گر سرعت لحظه‌ای متحرک در آن لحظه است. همان‌طور که می‌بینید، از شروع حرکت تا لحظه t' شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای مثبت و از لحظه t' تا t_1 شیب خط مماس و سرعت لحظه‌ای منفی می‌باشد. بنابراین سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط ابتدا هم جهت و سپس در خلاف جهت هم هستند.

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

(تست‌های ۷۰ تا ۷۷)

بررسی لحظه تغییر جهت یک متحرک

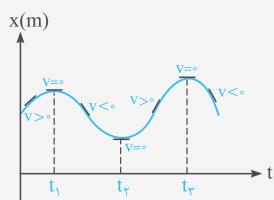
خلاصه نکات



تو این قسمت، می‌فایم معنی تغییر جهت متحرک را بفهمیم ... این موضوع تو فیلی از سوال‌ها به کارمون می‌بارد.

در شکل مقابل متحرکی بر روی محور x در حال حرکت است. این متحرک در ابتدا در جهت محور x در حال حرکت است (این موضوع یعنی سرعت آن مثبت است) در لحظه t_1 ، متحرک به نقطه O رسیده و در این نقطه متحرک تغییر جهت داده و در خلاف جهت داده و در لحظه t_2 تا t_3 حرکت می‌کند (این موضوع یعنی در ادامه حرکت سرعت آن منفی می‌شود). لحظه t را در اصطلاح لحظه تغییر جهت متحرک می‌نامیم.

شرط تغییر جهت دادن متحرک در نقطه ۰: برای این منظور باید سرعت متحرک صفر شده و قبل و بعد از آن لزوماً علامت سرعت متحرک تغییر کند.



نکت در قله‌های نمودار مکان - زمان، سرعت متحرک صفر شده و تغییر جهت (تغییر علامت) می‌دهد.

این موضوع یعنی در این مکان‌ها متحرک تغییر جهت می‌دهد.

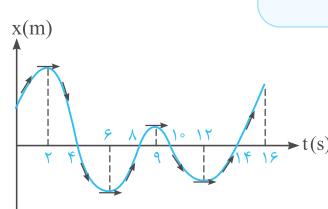
در لحظات t_1 , t_2 و t_3 جهت حرکت متغیر کرده است. \Rightarrow

مطلوبی خلاصه نکات فوق و با توجه به نمودار مکان - زمان داده شده، سرعت متحرک در دو لحظه t' و t'' صفر شده و تغییر علامت می‌دهد (یعنی اگر سرعت مثبت بوده، منفی شده و بالعکس).

بنابراین در بازه t_1 تا t_2 ، متحرک دو بار تغییر جهت می‌دهد.

تعذر

نشان دادن فلش بر روی مماس‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.



۲۷۱ تندی متحرک در لحظه‌های $t_1 = 2\text{ s}$, $t_2 = 6\text{ s}$, $t_3 = 9\text{ s}$ و $t_4 = 12\text{ s}$ صفر شده و علامت سرعت

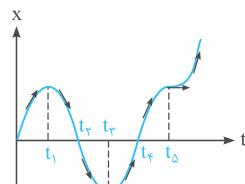
بعد و قبل از این لحظات تغییر می‌کند، بنابراین متحرک در 16 s اول حرکت، ۴ بار تغییر جهت می‌دهد.

از طرف دیگر در بازه‌های زمانی $(0 \text{ تا } 2\text{ s})$, $(2\text{ s} \text{ تا } 6\text{ s})$ و $(9\text{ s} \text{ تا } 12\text{ s})$ ، شیب خط مماس بر نمودار و در نتیجه علامت سرعت متحرک مثبت بوده و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.



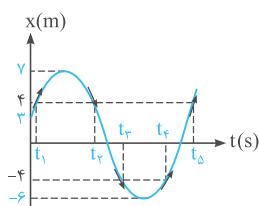
۲۹

فصل اول: حرکت بر خط راست



همان طور که می‌دانید، شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان، بیانگر سرعت متحرك است و در بازه‌های زمانی که در شکل مقابل می‌بینید، تنها در بازه زمانی t_1 تا t_2 شیب خط مماس بر نمودار منفی می‌شود.

به موارد زیر توجه کنید:



(۱) هنگامی که متحرك در نقاط $x = 4\text{ m}$ یا $x = -4\text{ m}$ قرار می‌گیرد، فاصله متحرك تا مبدأ مکان برابر 4 m می‌شود.

همان‌طور که در شکل مقابل می‌بینید، در لحظات t_1 , t_2 , t_3 , t_4 , t_5 فاصله متحرك تا مبدأ برابر 4 m می‌شود.

(۲) در صورت سؤال لحظاتی مدنظر است که متحرك در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند، بنابراین باید سرعت متحرك و شیب خط مماس بر نمودار منفی باشد، بنابراین فقط لحظات t_2 و t_3 قابل قبول هستند و گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

(تست‌های ۷۴ تا ۷۸)

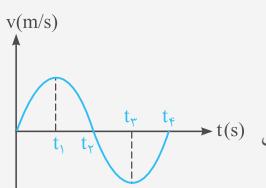
تطییل سرعت

خلاصه نکات

۱) هلا برایم پلوتو و یاد بگیریم که از روی نمودار سرعت - زمان چی میشه فهمید ...

فرض کنید نمودار سرعت - زمان متحركی که بر روی محور X حرکت می‌کند به صورت مقابل باشد:

در مورد این نمودار می‌توان به نکات مهم و کاربردی زیر اشاره کرد:



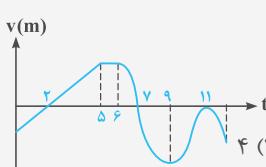
(۱) در بازه زمانی که نمودار بالای محور (t) است، (۰ تا t_2) سرعت مثبت بوده و متحرك در جهت محور X در حال حرکت می‌باشد.

(۲) در بازه زمانی که نمودار زیر محور (t) است، (t_2 تا t_4) سرعت منفی بوده و متحرك در خلاف جهت محور X در حال حرکت است.

(۳) در لحظه‌ای که سرعت متحرك صفر شده و قبل و بعد از آن لحظه علامت سرعت عوض می‌شود (مانند t_2)، متحرك تغییر جهت می‌دهد.

۲) تمرين بعد، فيلي فوب و مفهوميه. با وقت همه عبارت هاش رو بفهميد ...

تعزین (۱) با توجه به نمودار سرعت - زمان زیر که مربوط به متحركی است که روی محور X حرکت می‌کند، چند مورد از عبارات زیر درست است؟



الف) متحرك ۵ ثانیه در جهت محور X حرکت کرده است. ب) تندی حرکت، سه بار صفر می‌شود.

ج) متحرك دو بار تغییر جهت می‌دهد.

د) در شش ثانیه اول حرکت، متحرك ۲s در خلاف جهت محور X حرکت کرده است.

۱) ۲) ۳) ۴) ۵)

پاسخ به بررسی تک تک عبارت‌ها می‌پردازیم:

الف) سرعت متحرك در بازه زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 7s$ مثبت بوده و متحرك در این ۵ ثانیه در جهت محور X حرکت می‌کند و عبارت (الف) درست است.

ب) تندی حرکت در سه لحظه $t_1 = 2s$, $t_2 = 7s$, $t_3 = 11s$ صفر می‌شود و عبارت (ب) درست است.

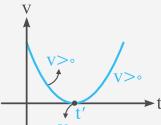
ج) در لحظات $t_1 = 2s$ و $t_2 = 7s$ سرعت متحرك صفر شده و علامت آن عوض می‌شود، بنابراین متحرك دو بار تغییر جهت می‌دهد. دقت کنید که در

لحظه $t = 11s$ با این‌که سرعت متحرك صفر می‌شود، اما تغییر علامت نمی‌دهد (در قبل و بعد از آن سرعت منفی است) و در نتیجه متحرك در این لحظه تغییر جهت نمی‌دهد و عبارت (ج) هم درست است.

۳) توی لحظه t = 11s، متمک يه لهجه وايساده و بعد بازم به هرگشش تو فلافل بهوت مهور X اراده داره، يعني اضطراباً متمک توقف کرده، ولی تغيير بهوت نداره ...

د) در شش ثانیه اول در بازه زمانی $t = 2s$ تا $t = 8s$ سرعت متحرك منفی بوده و متحرك در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند و در نتیجه عبارت (د)

هم درست است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.



تذکر هر توقفی، لزوماً لحظه تغییر جهت نیست. به طور مثال در شکل زیر در لحظه t' , سرعت صفر شده (لحظه توقف) ولی

تغییر علامت نمی‌دهد و این یعنی در این لحظه متحرك تغییر جهت نمی‌دهد.

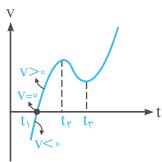
تعزین (۲) کدام یک از دو مورد زیر در رابطه با حرکت یک جسم بر روی مسیر مستقیم نادرست است؟

۱) اگر متحرك تغییر جهت دهد، حتماً توقف کرده است. ۲) اگر متحرك توقف کرده باشد، لزوماً تغییر جهت می‌دهد.

پاسخ با توجه به توضیحات مطرح شده در تذکر فوق، عبارت (۱) صحیح است.

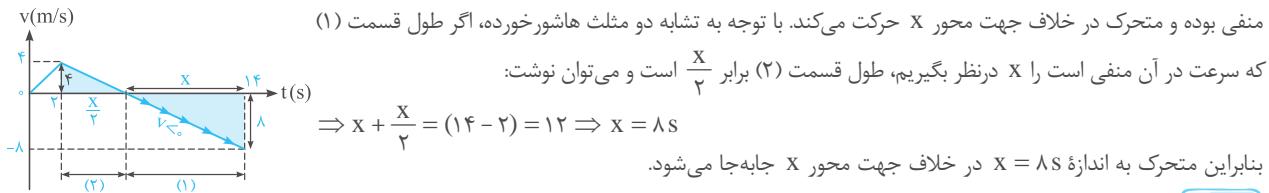
با توجه به نمودار سرعت - زمان داده شده، در لحظه $t = 6s$ سرعت متحرك صفر می‌شود و نه علامت سرعت عوض می‌شود، بنابراین متحرك در این

لحظه تغییر جهت نمی‌دهد. درستی سایر گزینه‌ها را با توجه به مطالب مطرح شده در خلاصه نکات (۷) بررسی کنید.



۱ ۷۵ با در دست داشتن نمودار سرعت - زمان برای مشخص کردن لحظه تغییر جهت متحرک، کافی است لحظه‌ای را بباییم که نمودار محور زمان را قطع کرده و تغییر علامت دهد. بنابراین در شکل روبرو، متحرک تنها در لحظه t_r تغییر جهت می‌دهد.

۲ ۷۶ همان‌طور که می‌دانیم در نمودار سرعت - زمان، در زمان‌هایی که نمودار زیر محور زمان است، سرعت متحرک منفی بوده و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند. با توجه به تشابه دو مثلث هاشورخورده، اگر طول قسمت (۱)



که سرعت در آن منفی است را X در نظر بگیریم، طول قسمت (۲) برابر $\frac{X}{2}$ است و می‌توان نوشت:

$$\Rightarrow x + \frac{X}{2} = (14 - 2) = 12 \Rightarrow x = 8\text{s}$$

بنابراین متحرک به اندازه $x = 8\text{s}$ در خلاف جهت محور X جابه‌جا می‌شود.

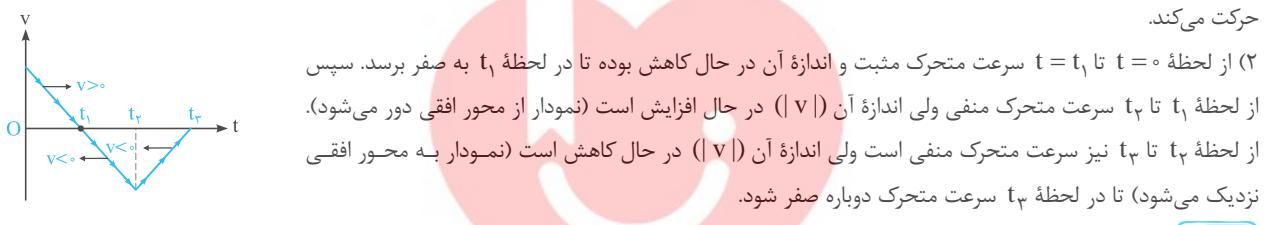
۳ ۷۷

ذکر مهم

در نمودار سرعت - زمان، هرگاه نمودار از محور زمان دور شود، تندي متحرک | ۷ | در حال افزایش است و بالعکس.

ابتدا باید دقت شود که نمودار سرعت - زمان متحرک داده شده است و با توجه به آن می‌توان گفت:

۱) از لحظه t_1 تا t_3 نمودار سرعت - زمان زیر محور زمان (t) است و در نتیجه سرعت متحرک در این بازه زمانی منفی است و متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند.



۲) از لحظه t_1 تا $t_1 = t_r$ سرعت متحرک مثبت و اندازه آن در حال کاهش بوده تا در لحظه t_1 به صفر برسد. سپس از لحظه t_1 تا t_2 سرعت متحرک منفی ولی اندازه آن (| ۷ |) در حال افزایش است (نمودار از محور افقی دور می‌شود).

از لحظه t_2 تا t_3 نیز سرعت متحرک منفی است ولی اندازه آن (| ۷ |) در حال کاهش است (نمودار به محور افقی نزدیک می‌شود) تا در لحظه t_3 سرعت متحرک دوباره صفر شود.

۴ ۷۸ به موارد زیر توجه کنید:

۱) همان‌طور که می‌دانید، اگر متحرک روی خط راست بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازه جابه‌جایی و مسافت طی شده توسط آن با یکدیگر برابر می‌شود و در نتیجه اندازه سرعت متوسط و تندي متوسط آن نیز یکسان خواهد شد.

۲) از طرف دیگر می‌دانیم که دو ثانیه دوم، معادل بازه زمانی $t_1 = 2\text{s}$ تا $t_2 = 4\text{s}$ است.

بنابراین برای پاسخ دادن به این سؤال، باید نموداری را پیدا کنیم که متحرک در این بازه زمانی تغییر جهت نداده باشد. سرعت متحرک‌های C و D (نمودار گزینه‌های (۳) و (۴)) به ترتیب در لحظات $2/5\text{s}$ و 3s صفر شده و تغییر علامت می‌دهد، بنابراین این دو متحرک تغییر جهت می‌دهند. متحرک A نیز در لحظه $t = 3$ تغییر جهت می‌دهد، اما متحرک B در بازه زمانی $t_1 = 2\text{s}$ تا $t_2 = 4\text{s}$ تغییر جهت نمی‌دهد، بنابراین گزینه (۲) پاسخ این سؤال است.

۵ ۷۹ برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

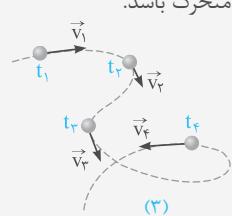
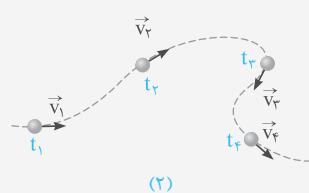
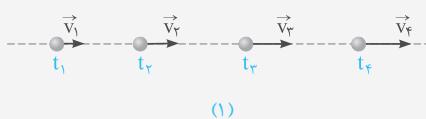
(۱۰۱ تا ۷۹) متن‌سازی لحظه‌یافته با کاکتوس سرعت

خلاصه نکات ۸

تو این قسمت، می‌فایم کلی مطلب در مورد شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای یاد بگیریم...

۱) آشنایی با مفهوم شتاب متوسط

همان‌طور که در علوم سال نهم دیدید، هرگاه سرعت حرکت جسمی تغییر کند، حرکت آن شتابدار است. با توجه به این که بردار سرعت در هر نقطه از مسیر، بر مسیر حرکت مماس است، تغییر سرعت جسم می‌تواند مانند شکل (۱)، به دلیل تغییر در اندازه بردار سرعت (تندي) جسم باشد، یا مانند شکل (۲) می‌تواند به دلیل تغییر در جهت بردار سرعت آن باشد، یا همچنان می‌تواند مانند شکل (۳) به دلیل تغییر هم‌زمان در اندازه و جهت بردار سرعت متحرک باشد.





۳۱

فصل اول: حرکت بر خط راست

شتاب متوسط متحرک در هر بازه زمانی دلخواه (t_1, t_2)، به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود که در آن \vec{v}_1, \vec{v}_2 ، سرعت متحرک در لحظه t_1, t_2 و \vec{v} ، سرعت متحرک در لحظه t_2 است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

ذکر همان‌طور که دیده می‌شود شتاب متوسط (\vec{a}_{av})، کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت ($\Delta \vec{v}$) است. یکای SI شتاب متوسط، متر بر مربع ثانیه (m/s^2) است.

تذکر در حالت یکبعدی (مثلاً هنگامی که متحرک بر روی محور X حرکت می‌کند)، برای محاسبه Δv ، کافیست v_1 و v_2 را با در نظر گرفتن علامت محاسبه کرده و $v_2 - v_1$ را به صورت جبری به دست آوریم.

تمرین معادله سرعت - زمان متحرکی که در مسیر مستقیم در حال حرکت است، در SI از رابطه $v = 3t^2 - 4$ به دست می‌آید. شتاب متوسط متحرک در ثانیه دوم حرکت چند متر بر مذبور ثانیه است؟

پاسخ منظور از ثانیه دوم حرکت، یعنی $2s \leq t < 3s$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$v = 3t^2 - 4 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = 3 \times 1^2 - 4 = -1 \text{ m/s} \\ t_2 = 2s \Rightarrow v_2 = 3 \times 2^2 - 4 = 8 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{8 - (-1)}{2 - 1} = 9 \text{ m/s}^2$$

(۲) محاسبه شتاب متوسط از روی نمودار سرعت - زمان

نکات این قسمت، فیلی شبیه ممکن است از روی نمودار مکان - زمانه ...

فرض کنید نمودار سرعت - زمان حرکت یک داده شده و شتاب متوسط بین دو لحظه t_A و t_B از آن خواسته شده است. در این‌گونه مسائل برای محاسبه شتاب متوسط، از دو روش زیر می‌توان استفاده کرد:

روش اول (نمودارخوانی): ابتدا بر روی نمودار، نقاط A و B را مشخص می‌کنیم. سپس سرعت متحرک در نقاط A و B را به دست آورده و به صورت زیر عمل می‌کنیم: شتاب متوسط بین A و B: $a_{av_{A,B}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}$

روش دوم (شیب بین دو نقطه از نمودار): در این حالت، ابتدا نقاط A و B را روی نمودار مشخص کرده و خط مستقیمی بین آن دو نقطه رسم می‌کنیم. شیب این خط، برابر شتاب متوسط متحرک بین دو لحظه A و B از حرکت است.

$$\tan \alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a_{av}$$

این روش در مسائلی که می‌خواهد شتاب متوسط را در بازه‌های زمانی مختلف مقایسه کند، روش بسیار مناسبی است.

تو ادامه کار با به تمرین توب، این موضوع رو بتوانی فهمیم ...

تمرین نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل است. شتاب

(یا این داشت) متوسط در بازه زمانی ۱ تا ۳ ثانیه در SI برابر است با:

$$10 \quad 5 \quad 10 \quad -10 \quad 1) \text{ صفر}$$

پاسخ نمودار داده شده یک نمودار سرعت - زمان است و برای محاسبه a_{av} در آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

با توجه به نمودار، سرعت لحظه‌ای در $t = 1s$ و $v = 10m/s$ و $t = 3s$ و $v = -10m/s$ است. بنابراین شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی برابر است با:

$$\begin{cases} t_A = 1s \Rightarrow v_A = 10 \text{ m/s} \\ t_B = 3s \Rightarrow v_B = -10 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{-10 - 10}{3 - 1} = -10 \text{ m/s}^2$$

(۳) تحلیل کیفی شتاب از روی نمودار سرعت - زمان

هلا برم یه کم روی شتاب لحظه‌ای هم کارکنیم ...

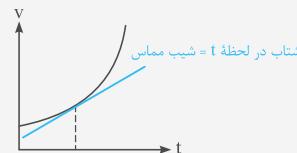
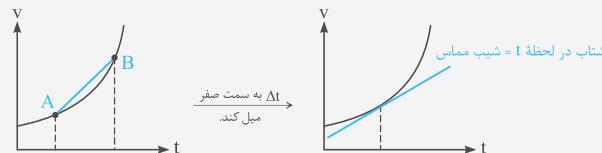
می‌دانیم که شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب

متotropic است. حال اگر بازه زمانی Δt بسیار کوچک شود، نقاط A

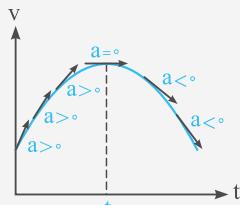
و B عملی تبدیل به یک نقطه شده و شیب خط واصل بین دو نقطه A و B،

با شیب مماس ترسیمی بر نمودار در نقطه B برابر است. شیب مماس ترسیمی

بر نمودار، برابر شتاب لحظه‌ای متحرک در لحظه t است.



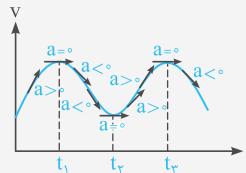
نکات مهم و کاربردی



با توجه به مماس‌های رسم شده در شکل مقابل، شتاب متحرک در ابتداء مثبت بوده، در قله نمودار صفر شده و سپس مقداری منفی دارد.

(قرار دادن فلش‌ها، برای درک بهتر شما عزیزان از مفهوم مثبت و منفی بودن شیب نمودار انجام شده است).

در نمودار داده شده، قله نمودار سرعت - زمان، لحظه تغییر جهت بردار شتاب است زیرا شتاب در قله صفر بوده، قبل از آن مثبت و بعد از آن منفی است.

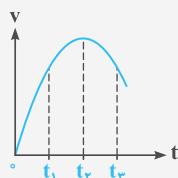


به طور کلی در نقاط ماکریم و مینیمم نسبی نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک صفر شده و بردار شتاب تغییر جهت می‌دهد.

(دقت شود که قرار دادن جهت برای مماس‌ها، به منظور درک بهتر شما عزیزان از علامت شیب مماس انجام شده است.) (در t_1 , t_2 , t_3 و شتاب تغییر جهت می‌دهد).

تو ادامه با دو تمرین توب، این موضوع رو کامل یاد می‌کیریم ...

تمرین ۳ شکل مقابل نمودار سرعت - زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. در کدام لحظه، شتاب متحرک مثبت و بیشینه است؟



t_2

۴) مبدأ زمان

t_3

t_1

پاسخ

می‌دانیم شیب مماس ترسیمی بر نمودار سرعت - زمان، شتاب متحرک را نشان می‌دهد. با توجه به این موضوع ابتدا باید در تمام لحظات مطرح شده در گیرینه‌ها، مماس رسم شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود از $t = 0$ تا t_1 ، زاویه مماس با محور افق دائمًا در حال کاهش بوده و شتاب متحرک دائمًا کاهش می‌یابد تا در t_2 صفر می‌شود. پس از t_2 ، شیب نمودار (شتاب) منفی شده و اندازه آن تا t_3 در حال افزایش است. بنابراین در لحظه $t = t_2$ ، شیب مماس رسم شده بر نمودار سرعت - زمان مقدار ماکریم و مثبت را داشته و در نتیجه در این لحظه شتاب متحرک مثبت و بیشینه است و گزینه (۴) صحیح است.

دقیق است.

دقیق است: در این سؤال در لحظه t_2 ، سرعت متحرک ماکریم و شتاب آن صفر است و در لحظه t_3 شتاب متحرک مقداری منفی دارد.

تمرین ۴ نمودار سرعت - زمان متحرکی که بر روی محور x در حال حرکت است، مطابق شکل می‌باشد. اگر در لحظه $t = 2s$ ، بردار شتاب متحرک در SI برابر $\vec{a} = 5m/s^2$ باشد، مقادیر v' و Δv به ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟

۱) ۱۰۰، ۵

۲) ۱۰۰، ۱۰

۳) ۱۰۰، ۱۰

پاسخ

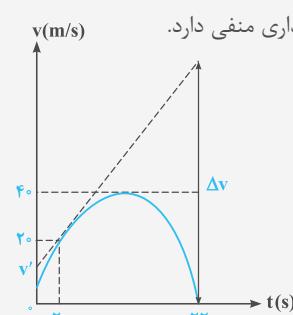
همان‌طور که می‌دانیم، شیب مماس ترسیمی بر نمودار سرعت - زمان، معادل با شتاب حرکت متحرک است. در این سؤال، شیب مماس ترسیم شده بر نمودار سرعت - زمان در لحظه $t = 2s$ برابر ۵ واحد است. بنابراین در ادامه با توجه به این موضوع می‌توان نوشت:

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{20 - v'}{2 - 0} = 5 \Rightarrow v' = 10 \text{ m/s}$$

$$\tan \alpha = \frac{\Delta v}{22 - 2} = 5 \Rightarrow \Delta v = 100 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \Delta v = \Delta v_1 + 20 \text{ m/s} = 120 \text{ m/s}$$

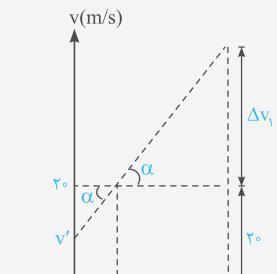
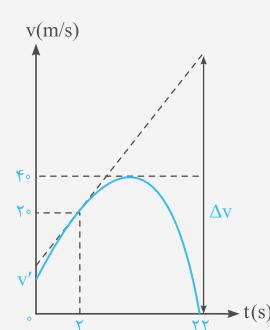
بنابراین گزینه (۴) صحیح است.



بانک کتاب آنلاین
www.ketab.love

۱۲۰، ۵ (۲)

۱۲۰، ۱۰ (۴)



شتاب متوسط با بردار $\vec{a} = 5m/s^2$ هم‌جهت است نه بردار $\vec{v}' = 10m/s$ و گزینه (۴) عبارت نادرستی است. سایر گزینه‌ها، با توجه به خلاصه نکات فوق، صحیح می‌باشند.



۳۳

فصل اول: حرکت بر خط راست

با توجه به توضیحات خلاصه نکات (۸)، در گزینه (۴) اندازه سرعت ثابت بوده و تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین در این حالت، $\vec{v}_1 = \vec{v}_f$ بوده و شتاب متوسط از لحظه t_1 تا t_f برابر صفر است.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_1}{\Delta t} \quad \vec{v}_f = \vec{v}_1 \rightarrow \vec{a}_{av} = 0$$

با توجه به رابطه شتاب متوسط (\vec{a}_{av}) داریم:

$$\begin{cases} t_1 = 3s \rightarrow \vec{v}_1 = 6\vec{i} \\ t_f = 6s \rightarrow \vec{v}_f = -6\vec{i} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{(-6) - (6)}{6 - 3} \vec{i} = -\frac{12}{3} \vec{i} = -4\vec{i}$$

ابتدا سرعت‌های متحرك که بر حسب cm/s داده شده‌اند را بر حسب m/s نوشت و با توجه به تعریف شتاب متوسط $(a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t})$ ، داریم:

$$\begin{cases} v_1 = 1cm/s = 0.01m/s, \quad v_f = 99cm/s = 0.99m/s \\ \Delta t = 0.5s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_f - v_1}{\Delta t} = \frac{0.99 - 0.01}{0.5} = \frac{0.98}{0.5} = 1.96 m/s^2$$

بادآوری

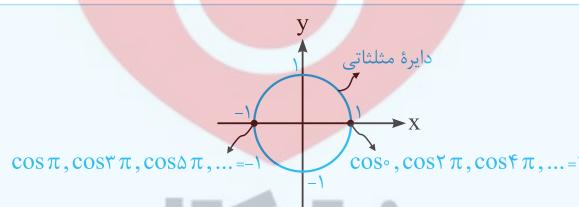
$$1cm/s = 0.01m/s \quad \text{یا} \quad 1m/s = 100cm/s$$

سرعت لحظه‌ای در ابتدا و انتهای بازه زمانی داده شده را به دست آورده و شتاب متوسط را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow v_1 = 0.3\pi \cos(10\pi) = 0.3\pi \\ t_f = 5s \rightarrow v_f = 0.3\pi \cos(25\pi) = 0.3\pi \cos(\pi) = -0.3\pi \end{cases}$$

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{|v_f - v_1|}{t_f - t_1} = \frac{|-0.3\pi - (0.3\pi)|}{5 - 2} = 0.2\pi m/s^2$$

بادآوری



گام اول: با توجه به بردار سرعت داده شده در پایان ثانیه دوم ($t = 2s$)، مقدار b را به دست می‌آوریم:

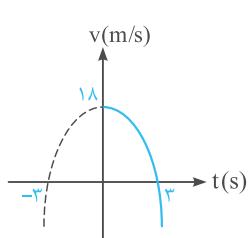
$$v = 2t^2 + bt + 6 \xrightarrow[t=2s]{v=20m/s} 2 \times (2)^2 + b \times 2 + 6 = 20 \Rightarrow b = 3$$

گام دوم: حال برای محاسبه شتاب متوسط در ثانیه دوم ($2s \leq t \leq 5s$)، به راحتی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 1s \rightarrow v_1 = 2 \times (1)^2 + 3 \times 1 + 6 = 11m/s \\ t_f = 5s \rightarrow v_f = 20m/s \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| = \frac{20 - 11}{5 - 1} = 9m/s^2$$

ابتدا ریشه‌های معادله موردنظر را به دست می‌آوریم و به دنبال آن نمودار سرعت - زمان را که یک سهمی است رسم می‌کنیم:

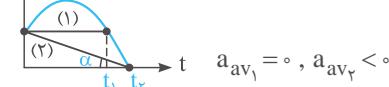
$$v = -2t^2 + 18 \Rightarrow \begin{cases} -2t^2 + 18 = 0 \Rightarrow t = 3s \quad t = -3 \\ t = 0 \Rightarrow v = 18m/s \end{cases}$$



همان‌طور که می‌بینید، در بازه زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_f = 5s$ ، سرعت متحرك مثبت بوده و متحرك در جهت محور x حرکت می‌کند. اندازه شتاب متوسط متحرك در این بازه زمانی برابر است با:

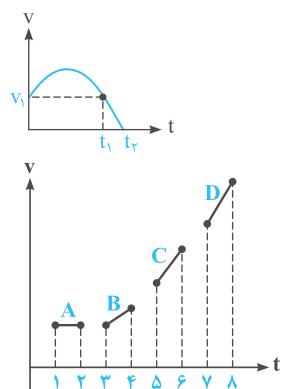
$$|\vec{a}_{av}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|0 - 18|}{3} = 6m/s^2$$

همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط رسم شده بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، برابر شتاب متوسط متحرك در آن بازه می‌باشد. در شکل روبرو شیب خط (۱) برابر a_{av_1} و شیب خط (۲) برابر a_{av_2} است. خط (۱) افقی است و شبیه برابر صفر دارد، اما شیب خط (۲)، عددی منفی است، بنابراین داریم:



$$a_{av_1} = 0, \quad a_{av_2} < 0$$

بادآوری



روش دیگر: با توجه به شکل مقابل، متحرک در لحظه صفر دارای سرعت v_1 و در لحظه t_1 نیز دارای همان سرعت می‌باشد، بنابراین تغییرات سرعت متحرک در بازه زمانی صفر تا t_1 صفر بوده و در نتیجه شتاب متوسط آن در این بازه نیز صفر است.

$$a_{av_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta v=0} a_{av_1} = 0$$

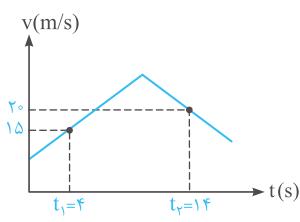
از سوی دیگر سرعت متحرک در لحظه t_2 برابر صفر است. بنابراین شتاب متوسط در بازه صفر تا t_2 برابر است با:

$$a_{av_2} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - v_1}{t_2 - 0} < 0$$

تمرین در شکل مقابل شتاب متوسط کدام متحرک بیشتر از سایرین است؟

$$a_{av_A} = 0 < a_{av_B} < a_{av_C} < a_{av_D}$$

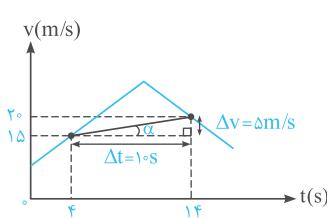
پاسخ



روش اول (نمودارخوانی): با توجه به نمودار سرعت - زمان داده شده می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 4 \text{ s} \rightarrow v_1 = 15 \text{ m/s} \\ t_2 = 14 \text{ s} \rightarrow v_2 = 20 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 - 15}{14 - 4}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2 = 0.5 \text{ m/s}^2$$

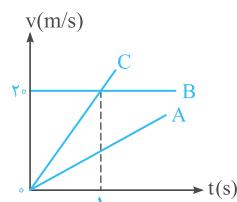


روش دوم (استفاده از شیب نمودار): شتاب متوسط بین هر دو لحظه دلخواه، برابر شیب خطی است که دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، مربوط به آن دو لحظه را به هم وصل می‌کند.

$$|\vec{a}_{av}| = \tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{5}{10} = 0.5 \text{ m/s}^2$$

دقت: با توجه به شیب پاره خط AB، $|\vec{a}_{av}|$ در این بازه مقداری مثبت دارد.

برای پاسخ به این سؤال، به موارد زیر توجه کنید:



۱) هر سه نمودار سرعت - زمان، به صورت خطی می‌باشند و شیب آن‌ها ثابت است، بنابراین شتاب هر سه متحرک در طول حرکتشان ثابت است.

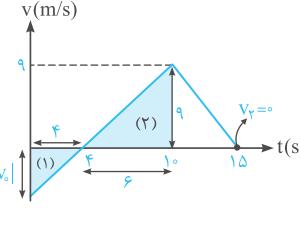
۲) با توجه به ثابت بودن شتاب، رابطه فوق در هر بازه زمانی دلخواه نیز در مورد شتاب متوسط سه متحرک برقرار است و در 10 ثانیه اول حرکت داریم:

برای محاسبه اندازه شتاب متوسط از روی نمودار سرعت - زمان، از رابطه $|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ **استفاده می‌کنیم.** به همین منظور کافی است تا به کمک تشابه مثلث‌ها، سرعت در لحظه $t = 0$ را به دست آوریم:

$$(2) \quad \text{تشابه مثلث‌های (1) و (2)} \Rightarrow |v_0| = \frac{|v_1|}{4} = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ m/s}$$

همان‌طور که از روی نمودار مشخص است، v_0 عددی منفی است و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow v_1 = v_0 = -3.75 \text{ m/s} \\ t_2 = 15 \text{ s} \Rightarrow v_2 = 0 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{0 - (-3.75)}{15 - 0} = 0.25 \text{ m/s}^2$$



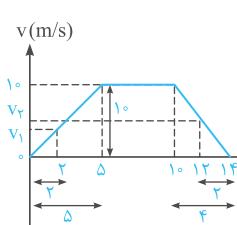
برای محاسبه شتاب متوسط در بازه زمانی $t_1 = 12 \text{ s}$ تا $t_2 = 22 \text{ s}$ ، ابتدا سرعت متحرک را در ابتداء و انتهای

این بازه زمانی به کمک تشابه به دست آوریم:

$$t_1 = 2 \text{ s} \Rightarrow \frac{10}{v_1} = \frac{5}{10} \Rightarrow v_1 = 4 \text{ m/s} \quad (\text{تشابه در سمت چپ شکل})$$

$$t_2 = 12 \text{ s} \Rightarrow \frac{10}{v_2} = \frac{14 - 10}{14 - 12} = \frac{4}{2} \Rightarrow v_2 = 5 \text{ m/s} \quad (\text{تشابه در سمت راست شکل})$$

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{5 - 4}{12 - 2} = \frac{1}{10} \text{ m/s}^2$$



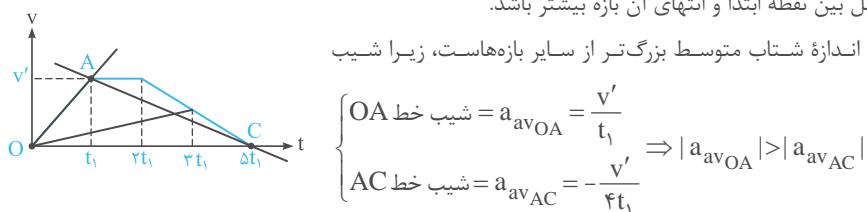


۳۵

فصل اول: حرکت بر خط راست

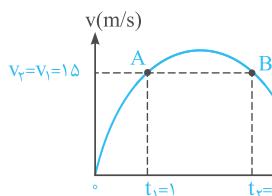
می‌دانیم که در نمودار سرعت - زمان، شیب خط وصل بین دو نقطه از نمودار، شتاب متوسط متحرک در آن بازه زمانی را می‌دهد. بنابراین شتاب متوسط در بازه‌ای بیشتر است که شیب خط وصل بین نقطه ابتداء و انتهای آن بازه بیشتر باشد.

با توجه به شکل رویه‌رو در بازه زمانی صفر تا t_1 ، اندازه شتاب متوسط بزرگ‌تر از سایر بازه‌های است، زیرا شیب خط OA بزرگ‌تر از شیب در سایر بازه‌ها است.

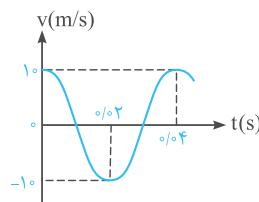


با توجه به نمودار سرعت - زمان داده شده، سرعت متحرک در دو لحظه t_1 و t_2 یکسان بوده و با توجه به تعریف شتاب متوسط ($|\vec{a}_{av}| = \frac{\Delta v}{\Delta t}$)، شتاب متوسط در این بازه زمانی صفر است.

$$|\vec{a}_{av}| = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad v_2 = v_1 = 15 \text{ m/s} \Rightarrow |\vec{a}_{av}| = \frac{15 - 15}{t_2 - t_1} = \frac{0}{t_2 - t_1} = 0$$

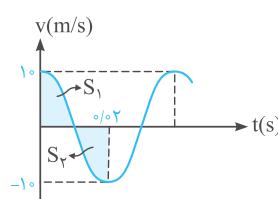


دقت: می‌دانیم شیب خط AB نیز برابر شتاب متوسط متحرک از t_1 تا t_2 است، با توجه به صفر بودن شیب این خط، $|\vec{a}_{av}|$ در این بازه زمانی صفر است.



خواسته اول: محاسبه شتاب متوسط: با توجه به نمودار مقابل، شتاب متوسط در بازه (۰، ۰.۲) برابر است با:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow v_1 = 10 \text{ m/s} \\ t_2 = 0.2 \rightarrow v_2 = -10 \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{-10 - 10}{0.2 - 0} = -10^3 \text{ m/s}^2$$



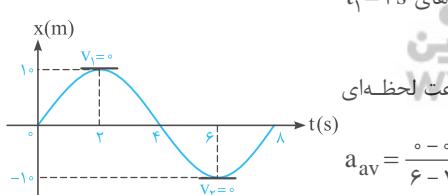
خواسته دوم: محاسبه سرعت متوسط:

برای محاسبه سرعت متوسط در بازه زمانی داده شده، ابتدا جایه‌جایی متحرک را به کمک مساحت زیر نمودار سرعت - زمان به دست می‌آوریم. در نمودار کسینوسی داده شده، مساحت S_2 با مساحت S_1 با هم برابر است. بنابراین جایه‌جایی متحرک در بازه زمانی ۰ تا ۰.۲ برابر صفر است.

$$\Delta x = |S_1| - |S_2| \xrightarrow{|S_1|=|S_2|} \Delta x = 0$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

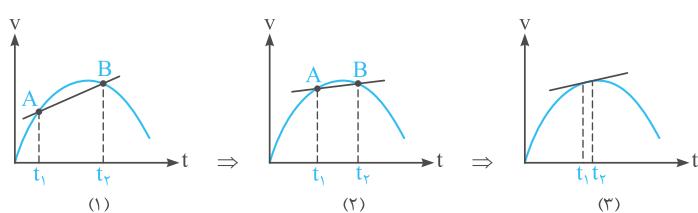
طبق تعریف شتاب متوسط ($a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$), کافی است سرعت متحرک را در لحظه‌های $t_1 = 0$ و $t_2 = 0.2$ بدست بیاوریم.



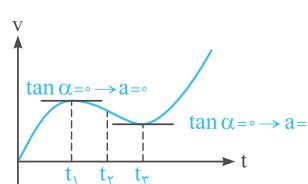
در شکل مشاهده می‌کنید که شیب مماس‌های رسم شده در لحظات فوق برابر صفر است، بنابراین سرعت لحظه‌ای در این نقاط صفر است و در نتیجه شتاب متوسط نیز در این بازه صفر است.

با توجه به مطالب ذکر شده در خلاصه نکات (۸)، شیب خط موردنظر شتاب لحظه‌ای را نشان می‌دهد.

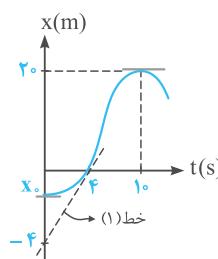
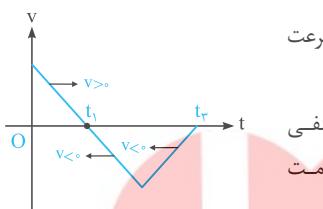
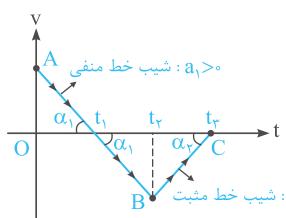
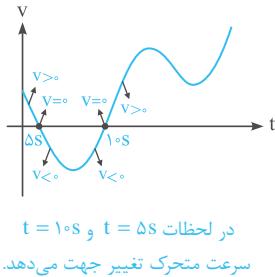
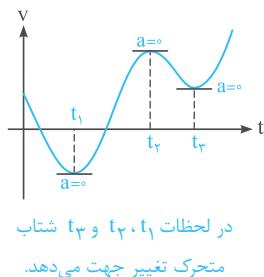
به شکل‌های زیر توجه کنید:



همان‌گونه که مشاهده می‌شود، با کوچک‌تر شدن بازه زمانی t_1 تا t_2 ، شیب پاره‌خط AB به سمت مماس رسم شده بر نمودار سرعت - زمان میل می‌کند و می‌دانیم شیب مماس رسم شده بر نمودار سرعت - زمان در هر لحظه، بیانگر شتاب لحظه‌ای در آن لحظه است.



در زمان‌هایی که شیب مماس رسم شده بر نمودار سرعت - زمان صفر باشد (از جمله نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی نمودار)، شتاب لحظه‌ای متحرک برابر صفر است. بنابراین در لحظات t_1 و t_3 ، شتاب متوسط متحرک برابر صفر است.



$$\Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = \frac{4}{4} = 1 \text{ m/s} \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

$a_{av_1} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{1 - 0}{4 - 0} = 0.25 \text{ m/s}^2 = 25 \text{ cm/s}^2$: شتاب متوسط در چهار ثانية اول
 $a_{av_2} = \frac{v_3 - v_1}{t_3 - t_1} = \frac{0 - 0}{10 - 0} = 0$: شتاب متوسط در ده ثانية اول

با توجه به این موضوع، شتاب متوسط در ۴ ثانية اول حرکت، 25 cm/s^2 بيشتر از ۱۰ ثانية اول حرکت است.

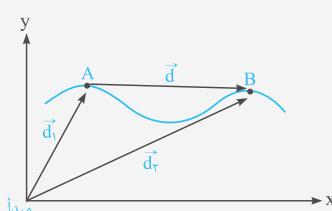
برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا به خلاصه نکات زیر توجه کنید:

جابه‌جایی، مسافت طی شده، \vec{v}_{av} و s_{av} در حرکت یک متحرك در صفحه (تست‌های ۱۰۲ تا ۱۱۳)

خلاصه نکات ۹

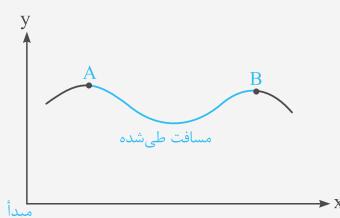


در آفرین قسمت از فصل، می‌فوايم يه کمي هم روی فضای دو بعدی و سه بعدی کار کنیم. البته در هر کتاب دلش می‌فوايد ...
 در شکل مقابل متحركی (مثالاً یک کوه نورد) بر روی مسیر نشان داده شده (مثالاً یک کوه) در حال حرکت است.
 بردار مکان در هر نقطه از مسیر حرکت برای این متحرك، برداری است که از مبدأ مختصات به آن نقطه از مسیر متصل شود. به طور مثال در شکل مقابل بردار مکان در نقاط A و B از مسیر نشان داده شده است.



۲- بردار تغییر مکان (جابه‌جایی)

متحرک نشان داده شده در شکل مقابل، در بازه زمانی t_1 تا t_2 از نقطه A تا نقطه B منتقل شده است.
 بردار جابه‌جایی در هر بازه زمانی برای این متحرك، برداری است که محل متحرك در شروع بازه زمانی را مستقیماً به محل متحرك در انتهای آن بازه زمانی متصل می‌کند.

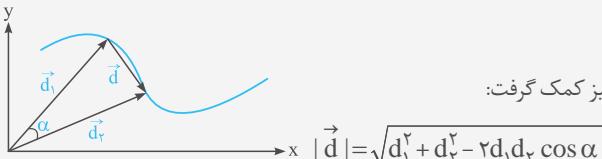


۳- مسافت طی شده

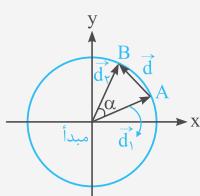
متحرك فوق، از نقطه A تا نقطه B حرکت کرده است و طول واقعی مسیر حرکتش برابر طول منحنی واقع در بین نقاط A و B است (که با رنگ آبی نشان داده شده است). این طول مسافت طی شده نام دارد.

تعریف درس ریاضی: با فرمول های تفاضل دو تابع برابر آشنا می شیم، ما هم بدمون نیومد اینجا یه سری به این موضوع بزنیم و با بدرار مکان قاطیش کنیم. البته کتاب درسی قصیده نداره وارد این بحث بش. به قاطر همین هم، ما این بحث رو به صورت مبجزا، اونم فقط برای پهه درس فوتا اوردهیمش ...

نکات مهم و کاربردی



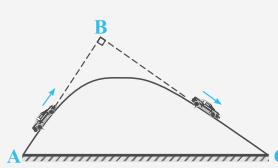
برای بدست آوردن اندازه بدار جایی \vec{d} ، می توان از رابطه زیر نیز کمک گرفت:



حالت خاص: اگر متحرك بر روی دایره در حال حرکت باشد، اندازه بدار مکان در A و B یکسان بوده (برابر شعاع دایره) و اندازه بدار جایی آن برابر است با:

$$|\vec{d}_1| = |\vec{d}_2| = r \Rightarrow |\vec{d}| = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

تمرین ۱) در شکل مقابل، اتومبیل نشان داده شده ابتدا از تپه بالا رفته و سپس از طرف دیگر آن پایین می آید. در مسیر نشان داده شده، جایه جایی متحرك از A تا C چقدر است؟ (A $B=300\text{m}$, BC $=400\text{m}$)



$$(1) 500 \text{ متر} \quad (2) 700 \text{ متر} \quad (3) \text{کمتر از } 500 \text{ متر}$$

پاسخ: همان طور که در شکل مقابل مشاهده می کنید، متحرك در طول حرکت خود از نقطه A به نقطه C (انتهای مسیر) رفته و جایه جایی آن برابر بدار \vec{AC} است:

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(300)^2 + (400)^2} = 500 \text{ m}$$

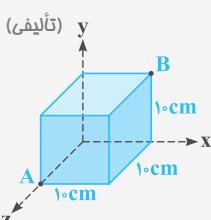
بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

دقیق: توجه کنید که در این سؤال، مسافت طی شده (طول خط آبی رنگ) از یک طرف بزرگ تر از جایه جایی بوده و از سوی دیگر بیشتر از ۵۰۰ متر و کمتر از ۷۰۰ متر است (چرا؟).

ذکر: در صورتی که طول، عرض و ارتفاع یک متحرك در فضای سه بعدی تغییر گردد و متحرك از نقطه A به نقطه B منتقل شود، اندازه بدار جایه جایی آن از رابطه زیر بدست می آید:

$$A : \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix} \rightarrow B : \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{vmatrix} \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

تمرین ۲) در شکل زیر، متحركی با حرکت بر روی سطوح جانبی یک مکعب توپر به ضلع ۱۰ سانتی متر، خود را از نقطه A به نقطه B می رساند. اندازه جایه جایی متحرك در این تغییر مکان چند سانتی متر است؟



$$(1) 10\sqrt{3}$$

$$(2) 10(1+\sqrt{2})$$

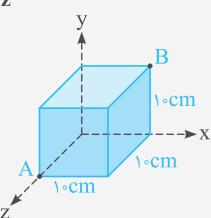
$$(3) 10\sqrt{2}$$

$$(4) 5\sqrt{3}$$

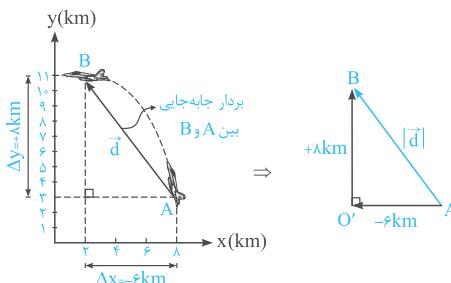
پاسخ: برای این سؤال، دو روش زیر را ارائه می کنیم:

روش اول: با توجه به مختصات نقاط A و B و تذکر ارائه شده در قبل از سؤال داریم:

$$A : \begin{vmatrix} x_A = 0 \\ y_A = 0 \\ z_A = 10 \end{vmatrix} \rightarrow B : \begin{vmatrix} x_B = 10 \\ y_B = 10 \\ z_B = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(10-0)^2 + (10-0)^2 + (0-10)^2} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

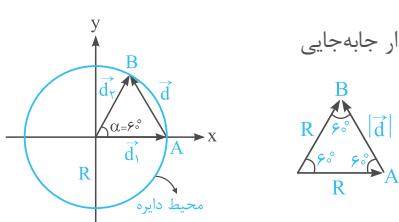


روش دوم: همان‌طور که در شکل فوق می‌بینید، نقاط A و B دو انتهای یک قطر مکعب هستند و جابه‌جایی برابر اندازه AB است، پس کافی است اندازه قطر مکعب را بیابیم. از طرفی اندازه یک قطر از مکعبی به ضلع a برابر با $d = a\sqrt{3}$ است و داریم: $a = 10\text{ cm}$ بنابراین $|\vec{d}| = a\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$. (۱) صحیح است.



می‌دانیم که جهت بردار جابه‌جایی، هم‌جهت با برداری است که از نقطه ابتدای حرکت (A) به نقطه انتهای حرکت (B) متصل می‌شود. در این سؤال برای محاسبه اندازه جابه‌جایی با کمک قضیه فیثاغورث داریم:

$$\Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10\text{ km}$$



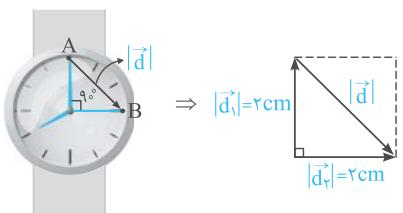
فرض کنید که متحرک بر روی محيط دایره ۶۰ درجه چرخیده و از B به A منتقل می‌شود. بردار جابه‌جایی

متحرک در این حالت برابر تفاضل بردارهای مکان است.

بردار جابه‌جایی برداری است که نقطه ابتدای حرکت را به نقطه انتهای آن وصل می‌کند. مثلث روبه‌رو یک مثلث متساوی‌الاضلاع است، بنابراین اندازه جابه‌جایی در این حالت برابر R است (چرا؟).

از سوی دیگر، متحرک ۶۰ درجه بر روی محيط دایره چرخیده و $\frac{1}{6}$ آن را پیموده است (۶۰ درجه، $\frac{1}{6}$ برابر ۳۶۰ درجه است). با توجه به این موضوع، مسافت

$$\text{مسافت طی شده} = \frac{1}{6} \times [2\pi R] = \frac{\pi}{3} R \Rightarrow \frac{\text{اندازه جابه‌جایی}}{\text{مسافت طی شده}} = \frac{R}{\frac{\pi}{3} R} = \frac{3}{\pi}$$



عقربه دقیقه‌شمار، در هر ۶۰ دقیقه یک دور می‌چرخد. بنابراین در طول ۱۵ دقیقه به ۹۰ درجه ($\frac{1}{4}$ دور) چرخیده و از نقطه‌ای مانند A به B می‌رود. بنابراین با توجه به رابطه فیثاغورث، مقدار جابه‌جایی برابر است با:

$$|\vec{d}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$



متحرک پس از ۱۰ دقیقه، ۱۰ بار به طور کامل بر روی دایره چرخیده و مجدداً به نقطه شروع حرکت می‌رسد، بنابراین اندازه جابه‌جایی متحرک در این مدت برابر صفر است. در این حالت مسافت طی شده، ۱۰ برابر محيط دایره است.

$$= 10 \times (2\pi R) \approx 10 \times 2 \times 3 \times 5 = 300 \text{ m}$$

۳ متحرک در طول حرکت خود توقف ندارد و در صورتی که مسافت طی شده توسط متحرک ۳a باشد، ثابت می‌شود: (۱) بیشترین جابه‌جایی متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از رأس مربع شروع به حرکت کند و سپس مسافتی برابر ۳a را پیماید، در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر a است، یعنی برابر طول برداری که مستقیماً نقطه شروع را به نقطه پایان متصل می‌کند.

(۲) کمترین جابه‌جایی متحرک مربوط به حالتی است که متحرک از وسط یکی از اضلاع مربع شروع به حرکت کند. در این حالت، جابه‌جایی متحرک برابر $a\sqrt{2}$ است.

$$\left\{ \begin{array}{l} |\vec{d}|_{\min} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \\ |\vec{d}|_{\min} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \left(\frac{a}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \end{array} \right.$$

دقت: در حل این مسئله شما می‌توانید حالات دیگری به غیر از موارد ۱ و ۲ را نیز بررسی کنید، در این مسئله تحلیل جابه‌جایی‌های مختلف متحرک مدنظر

طرح بوده است. به سادگی می‌توان نشان داد که در تمام حالت‌ها، جابه‌جایی از a کوچک‌تر (یا مساوی) و از $a\sqrt{2}$ بزرگ‌تر (یا مساوی) می‌باشد.

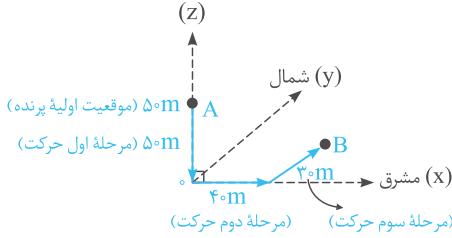


۳۹

فصل اول: حرکت بر خط راست

با توجه به تمرین (۲) در خلاصه نکات (۹)، گزینه (۱) درست است.

برای پاسخ به این تست مفهومی، شکل زیر را در نظر بگیرید. با توجه به حرکت‌های اشاره شده برای پرنده در صورت سؤال، موقعیت آن از A به B رسیده است:



A : موقعیت اولیه در

B : موقعیت ثانویه در

بردار جابه‌جایی برابر طول پاره‌خط AB است و داریم:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{40^2 + 30^2 + (-50)^2} = 50\sqrt{2} \text{ m}$$

همان‌طور که می‌دانید، چون زمان هر دو حرکت یکسان است، اندازه سرعت متوسط به اندازه جابه‌جایی جسم بستگی دارد. چون هر دو مسیر

نقشه شروع و پایان یکسانی دارند، اندازه جابه‌جایی و اندازه سرعت متوسط آن‌ها یکسان است.

$$(v_{av})_1 = (v_{av})_2$$

از طرف دیگر در یک بازه زمانی برای، تندی متوسط به مسافت طی شده بستگی دارد. چون در یک مدت زمان یکسان، مسافت طی شده در مسیر (۲) بیشتر از مسافت طی شده در مسیر (۱) است، پس تندی متوسط در مسیر (۲) بیشتر است.

$$(s_{av})_2 > (s_{av})_1$$

می‌دانیم برای محاسبه اندازه جابه‌جایی، نقطه ابتدای حرکت را به نقطه انتهای حرکت متصل کرده و طول آن پاره‌خط را اندازه می‌گیریم. با توجه به شکل مقابل، اندازه جابه‌جایی برابر AC بوده و مقدار آن با کمک قضیه فیثاغورث برابر است با:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 30^2 + 40^2 \xrightarrow[اعداد فیثاغورثی هستند]{30, 40 \rightarrow 50} AC = 50 \text{ m}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{زمان جابه‌جایی}} = \frac{AC}{\Delta t} = \frac{50}{20} = 2.5 \text{ m / s}$$

در ادامه برای به دست آوردن تندی متوسط متحرک، باید مسافت طی شده توسط متحرک را به دست آورده و بر زمان حرکت تقسیم کنیم. بدین ترتیب داریم:

$l = AB + BC = 30 + 40 = 70 \text{ m}$: مسافت طی شده

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{70}{20} = 3.5 \text{ m / s}$$

$\vec{d} = AB = 2R$: قطر دایره = $|\vec{d}| = AB$: اندازه جابه‌جایی

$$l = \frac{\text{محیط دایره}}{2} = \frac{2\pi R}{2} = \pi R : \text{مسافت}$$

در ادامه نسبت تندی متوسط حرکت را به اندازه سرعت متوسط محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{s_{av}}{|\vec{v}_{av}|} = \frac{\frac{l}{\Delta t}}{\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}} = \frac{l}{|\vec{d}|} = \frac{\pi R}{2R} = \frac{\pi}{2}$$

در سؤال (۱۰۳)، نسبت اندازه جابه‌جایی به مسافت طی شده توسط این متحرک را به دست آوردم که برابر $\frac{3}{\pi}$ بود. طبق روابط

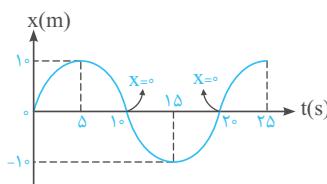
$$\frac{|\vec{v}_{av}|}{s_{av}} = \frac{|\vec{d}|}{l} = \frac{3}{\pi} \quad \text{و} \quad s_{av} = \frac{1}{\Delta t} \cdot |\vec{v}_{av}|$$

همان‌طور که می‌دانید، اگر متحرکی بر روی یک خط راست، بدون تغییر جهت حرکت کند، اندازه جابه‌جایی و مسافت آن یکسان بوده و در نتیجه اندازه سرعت متوسط و تندی متوسط آن نیز یکسان می‌شود.

در این سؤال اگر به مسیرهای رسم شده دقت کنید، متوجه می‌شوید که تنها در نمودار گزینه (۳)، متحرک بر روی یک خط راست حرکت می‌کند و ممکن است در آن تندی متوسط با سرعت متوسط برابر شود.



معادله مکان داده شده به صورت سینوسی است. برای مشخص کردن جهت بردار مکان در این سؤال، مناسب‌ترین روش رسم نمودار مکان-زمان است. برای این سؤال، ابتدا محل‌های برخورد نمودار با محور t را به دست می‌آوریم:



$$x = 1 \sin \frac{\pi}{1} t \xrightarrow{X=0} \begin{cases} \frac{\pi}{1} t = \pi \Rightarrow t = 1 \text{ s} \\ \frac{\pi}{1} t = 2\pi \Rightarrow t = 2 \text{ s} \\ \vdots \end{cases}$$

همان‌گونه که مشاهده می‌کنید در بازه زمانی $1 \text{ s} < t < 2 \text{ s}$ (یعنی ۵ ثانیه سوم و ۵ ثانیه چهارم حرکت)، متحرک در مکان‌های منفی قرار داشته و بردار مکان جسم در خلاف جهت محور x بوده و گزینه (۳) صحیح است.

برای یافتن لحظاتی که بردار مکان تغییر جهت می‌دهد، کافی است معادله مکان-زمان مربوط به متحرک را تعیین علامت کنیم:

$$\text{ریشه مضاعف } x = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s} \quad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & 1 & \infty \\ \hline x & + & 0 & + \end{array} : \text{معادله مکان}$$

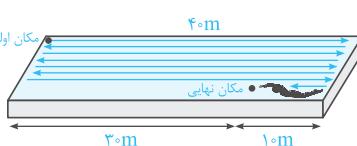
ملحوظه می‌کنید مکان متحرک در لحظه $t = 1 \text{ s}$ صفر می‌شود ولی تغییر علامت نمی‌دهد و متحرک همواره در سمت مثبت محور x قرار دارد. بنابراین بردار مکان این متحرک در هیچ لحظه‌ای تغییر جهت نمی‌دهد.

تذکر

بردار مکان هنگامی تغییر جهت می‌دهد که متحرک از یک سمت مبدأ مختصات روی محور x ، خود را به سمت دیگر آن برساند.

ابتداء عدد ۲۹۰ را به صورت زیر می‌نویسیم تا مشخص شود شناگر چند بار طول استخر را طی کرده است:

$$290 = 280 + 10 = 7(40) + 10$$



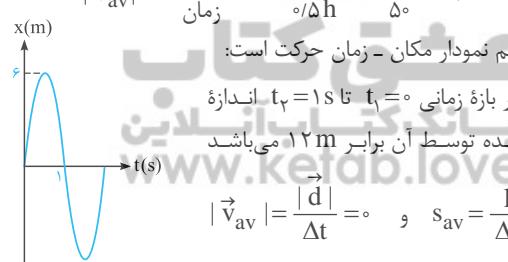
بنابراین شناگر هفت بار طول استخر را طی کرده و 10 m دیگر نیز شنا می‌کند. به شکل زیر دقیق کنید:

همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید، در این حالت فاصله مکان نهایی شناگر تا مکان اولیه آن برابر 30 m می‌شود. بنابراین جایه‌جایی متحرک برابر $s = 0/03 \text{ km} = 0/03 \text{ km} / 0/5 \text{ h} = 0/06 \text{ km/h}$ و اندازه سرعت متوسط شناگر در مدت زمان $0/5 \text{ h}$ ساعت برابر است با:

$$|\vec{v}_{av}| = \frac{\text{جا به جایی}}{\text{زمان}} = \frac{0/03 \text{ km}}{0/5 \text{ h}} = 0/06 \text{ km/h}$$

بهترین روش برای حل این‌گونه مسائل، رسم نمودار مکان-زمان حرکت است:

$$\begin{cases} t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \sin(0) = 0 \\ t_2 = 1 \text{ s} \Rightarrow x_2 = 6 \sin(\pi) = 0 \end{cases}$$



$$|\vec{v}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} = \frac{1}{0.5} = 2 \text{ m/s}$$

ابتداء به جدول ارائه شده در صورت سؤال توجه کنید:

تندی متوسط ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$)	مکان پایانی (m)	مکان آغازین (m)	
$1/5$	$-8\vec{i}$	$-2\vec{i}$	متحرک A
2	$+4\vec{i}$	$-2\vec{i}$	متحرک B

با توجه به این جدول داریم:

$$(\vec{v}_{av})_A = \frac{\vec{d}_A}{\Delta t_A} = \frac{-8\vec{i} - (-2\vec{i})}{1} = -6\vec{i} \xrightarrow[\text{(s}_{av}\text{)}_A = 1/5 \text{ m/s}]{\text{طبق صورت سؤال}} |(\vec{v}_{av})_A| = (s_{av})_A = 1/5 \text{ m/s}$$

$$(\vec{v}_{av})_B = \frac{\vec{d}_B}{\Delta t_B} = \frac{+4\vec{i} - (-2\vec{i})}{1} = 6\vec{i} \xrightarrow[\text{(s}_{av}\text{)}_B = 2 \text{ m/s}]{\text{طبق صورت سؤال}} |(\vec{v}_{av})_B| < (s_{av})_A = 2 \text{ m/s}$$

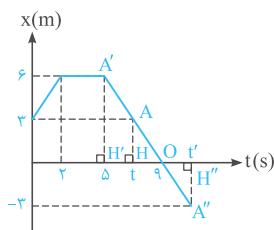
از طرفی می‌دانیم برابر بودن تندی متوسط و اندازه سرعت متوسط، نشان‌دهنده آن است که متحرک در طول حرکت، تغییر جهت نمی‌دهد. این موضوع

یعنی متحرک A در طول حرکتش، تغییر جهت نمی‌دهد و متحرک B در طول حرکتش، تغییر جهت می‌دهد.



٤١

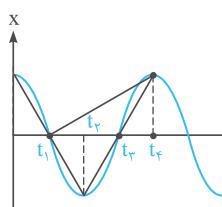
فصل اول: حرکت بر خط راست



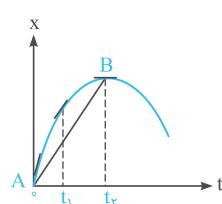
برای پاسخ دادن به این سؤال، ابتدا باید زمانی را که متوجه برای دومین بار به مکان $x = 3 \text{ m}$ می‌رسد، به صورت زیر به دست آوریم:

$$\Delta OAH \sim \Delta OA'H' \Rightarrow \frac{OA}{OH} = \frac{AH}{H'H'} \Rightarrow \frac{3}{9-t} = \frac{6}{4} \Rightarrow t = 7\text{s}$$

در ادامه با توجه به این‌که دو مثلث OAH و $OA'H'$ یکسان هستند، مقدار t' برابر 11s به دست می‌آید (چرا؟). در پایان می‌توانیم بگوییم در بازه‌های زمانی $(0 \text{ تا } 2\text{s})$ و $(11 \text{ تا } 7\text{s})$ متوجه در حال دور شدن از مکان اولیه خود می‌باشد. بنابراین در مجموع متوجه به مدت 6 ثانیه در حال دور شدن از مکان اولیه‌اش می‌باشد.

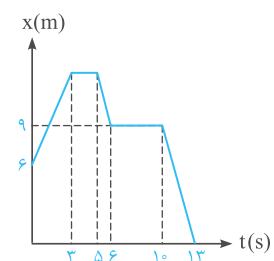


همان‌طور که می‌دانید، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار مکان – زمان، معرف سرعت متوسط در بازه زمانی موردنظر است. ابتدا مطابق شکل مقابل در بازه‌های زمانی موردنظر خط واصل را رسم می‌کنیم. همان‌طور که در شکل می‌بینید، اندازه شیب خط مماس در سه بازه $(0 \text{ تا } t_1)$ ، $(t_2 \text{ تا } t_3)$ و $(t_4 \text{ تا } t_5)$ یکسان است. اما در بازه $(t_1 \text{ تا } t_4)$ شیب خط مماس و در نتیجه اندازه سرعت متوسط متفاوت است. برای اطمینان بیشتر می‌توانید اندازه سرعت متوسط را در هر بازه محاسبه کنید.



مطابق شکل مقابل، بین لحظه $t = 0$ تا لحظه تغییر جهت دادن متوجه (یعنی t_2)، پاره‌خطی رسم می‌کنیم. شیب این پاره‌خط بیانگر اندازه سرعت متوسط متوجه از لحظه شروع حرکت تا لحظه تغییر جهت است. علاوه بر این در لحظات صفر، t_1 و t_2 نیز مماس‌هایی بر نمودار رسم می‌کنیم. شیب این مماس‌ها معرف تندی متوجه در لحظات مختلف است. همان‌طور که می‌بینید، در شروع حرکت شیب خط مماس بیشتر از شیب پاره‌خط AB است و با گذشت زمان شیب خط مماس برابر شیب خط AB شده و در نزدیکی t_2 ، شیب خط مماس کمتر از شیب خط AB می‌شود. بنابراین تندی حرکت در ابتداء بیشتر از v_{av} بوده، سپس برابر v_{av} شده و در نهایت کمتر از v_{av} می‌شود.

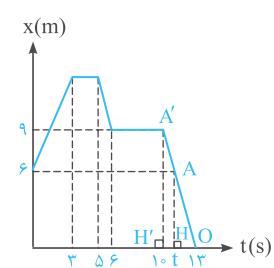
به موارد زیر توجه کنید:



(۱) طبق رابطه $s_{av} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta s$ ، تندی متوسط به مسافت طی شده و به دنبال آن تندی متوسط حرکت نیز صفر است.

(۲) در نمودار رسم شده در دو بازه زمانی $t_1 = 3\text{s}$ تا $t_2 = 5\text{s}$ و $t_3 = 6\text{s}$ تا $t_4 = 10\text{s}$ می‌باشد که به مدت 4s متوجه توقف داشته است.

(۳) چون در صورت سؤال طول بزرگ‌ترین بازه زمانی موردنظر است، بنابراین بازه موردنظر $t_1 = 3\text{s}$ تا $t_4 = 10\text{s}$ می‌باشد که تندی متوسط توقف داشته است.



برای صفر شدن سرعت متوسط، باید جایه‌جایی متوجه صفر شود. با توجه به نمودار مکان – زمان داده شده، بزرگ‌ترین بازه زمانی که سرعت متوسط صفر می‌شود، مربوط به لحظه شروع حرکت تا لحظه‌ای است که متوجه به نقطه $x = 6\text{ m}$ می‌رسد. برای به دست آوردن لحظه موردنظر، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta OAH \sim \Delta OA'H' \Rightarrow \frac{OA}{OH} = \frac{AH}{H'H'} \Rightarrow \frac{6}{9} = \frac{13-t}{3} \Rightarrow t = 11\text{s}$$

بنابراین بزرگ‌ترین بازه زمانی که اندازه سرعت متوسط صفر می‌شود، برابر 11 ثانیه است و با توجه به پاسخ سؤال قبل، بزرگ‌ترین بازه زمانی که تندی متوسط حرکت صفر می‌شود برابر $\frac{11}{4}$ ثانیه است و نسبت آن‌ها $\frac{11}{4}$ می‌شود.

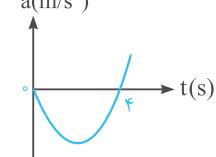
عبارت (ج) هرگز نمی‌تواند رخ دهد. طبق رابطه $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ ، اگر سرعت جسمی ثابت باشد، تغییرات آن صفر بوده و شتاب حرکت صفر می‌شود.

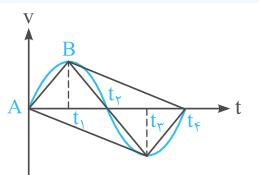
از سوی دیگر سایر عبارت‌های مطرح شده می‌توانند رخ دهند. برای درک بهتر سعی کنید برای هر یک مثالی را پیدا کنید.

ابتدا ریشه‌های سه‌می موردنظر را به دست می‌آوریم و سپس نمودار شتاب – زمان را رسم می‌کنیم:

$$a = t^2 - 4t = 0 \Rightarrow t(t-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4\text{s} \end{cases}$$

دقت کنید که سه‌می موردنظر از مبدأ شروع می‌شود و با توجه به این‌که ضریب t^2 مثبت است، سه‌می رو به بالا می‌باشد. همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌کنید در لحظه $t = 4\text{s}$ ، اندازه شتاب حرکت صفر شده و علامت شتاب تغییر می‌کند، بنابراین در این لحظه شتاب تغییر جهت می‌دهد. از طرفی با توجه به رابطه $F = ma$ ، می‌دانیم که نیروی وارد بر متوجه همواره هم جهت با شتاب بوده و در نتیجه نیروی وارد بر متوجه نیز در پایان ثانیه چهارم تغییر جهت می‌دهد.

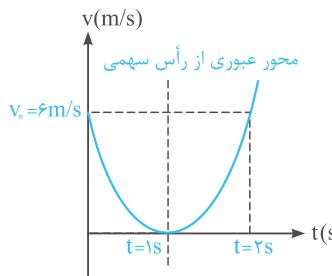




همان طور که می‌دانید، شیب خط وصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان بیانگر شتاب متوسط در بازه زمانی موردنظر است. ابتدا در هریک از بازه‌های زمانی موردنظر، خط وصل را رسم می‌کنیم (همه خطوط را در یک شکل ترسیم کرده‌ایم).

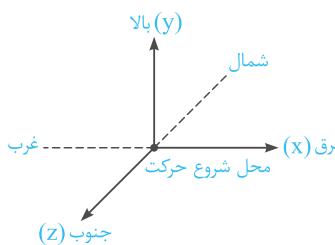
در صورت سؤال ذکر شده است که در بازه زمانی t_1 تا t_2 شتاب متحرك برابر \vec{a} است و ما به دنبال بازه‌ای می‌گردیم که شتاب متحرك \vec{a} - باشد. بنابراین باید اندازه شیب خط موردنظر برابر اندازه شیب خط AB ولی با علامت منفی باشد. اگر به نمودار دقت کنید، متوجه می‌شویم که تنها در بازه t_1 تا t_2 این اتفاق رخ می‌دهد.

همان طور که می‌دانید، سهمی نسبت به محور عبوری از رأس آن، دارای تقارن است. در دو ثانیه اول حرکت که یک بازه متقاضن نسبت به محور عبوری از رأس سهمی است، سرعت در ابتدا و انتهای بازه زمانی برابر بوده و در نتیجه شتاب متوسط در این بازه زمانی برابر صفر است.



$$\begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow v_1 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ t_2 = 2 \text{ s} \rightarrow v_2 = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 0$$

دقیق: در این سؤال، به طور کلی در بازه زمانی t_1 و t_2 ، به شرطی که $t = 1\text{ s}$ در وسط آن بازه قرار گیرد ($\frac{t_1 + t_2}{2} = 1\text{ s}$)، شتاب متوسط برابر صفر می‌شود. به عنوان مثال از $t_1 = 0/75\text{ s}$ تا $t_2 = 1/25\text{ s}$ نیز شتاب متوسط برابر صفر است.



اگر متحرك از نقطه (x_A, y_A, z_A) به نقطه (x_B, y_B, z_B) منتقل شود، جابه‌جایی آن برابر $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ است. فرض کنید این متحرك از مبدأ $(0, 0, 0)$ شروع به حرکت کرده است. اگر این متحرك 10 m از سطح زمین به سمت بالا حرکت کند مؤلفه y از صفر به 10 m تبدیل می‌شود، در ادامه اگر 6 m به سمت شمال برود، مؤلفه Z از صفر به -6 m و در نهایت اگر 8 m از سمت غرب برود مؤلفه X از صفر به -8 m تبدیل می‌شود، بنابراین مختصات B برابر $(-8, 10, -6)$ است.

$$AB = \sqrt{(-8)^2 + 10^2 + (-6)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 10 \times 1/\sqrt{2} = 14\text{ m}$$

$$\text{جابه‌جایی } |\vec{v}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\text{زمان}} \Rightarrow |\vec{v}_{av}| = \frac{14}{10} = 1.4 \text{ m/s}$$

با توجه به این که ذره، $\frac{1}{3}$ محیط دایره را طی کرده است، مسافت طی شده توسط آن به صورت زیر به دست می‌آید:

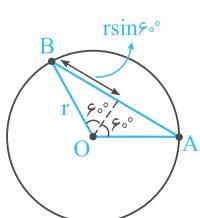
$$1 = \frac{1}{3}(2\pi r) = \frac{1}{3}(6r) = 2r$$

از طرف دیگر اندازه جابه‌جایی ذره برابر طول پاره خط AB است که با کمک هندسه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|\vec{d}| = AB = 2r \sin(60^\circ) = 2r \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}r$$

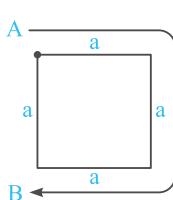
حالا با یک تناسب ساده، نسبت اندازه سرعت متوسط به تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_{av}}{s_{av}} = \frac{|\vec{d}|}{1} = \frac{\sqrt{3}r}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{3}s_{av} = 2v_{av}$$



همان طور که در پاسخ سؤال (۱۰۶) مشاهده کردید، در این سؤال بیشترین جابه‌جایی زمانی روی می‌دهد که مطابق شکل مقابل، متحرك از نقطه A تا B جابه‌جا شده باشد. در این حالت داریم:

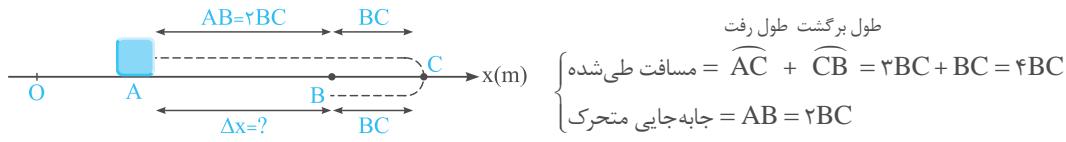
$$\frac{|\vec{v}_{av}|}{s_{av}} = \frac{|\vec{d}|}{1} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$





۴۳

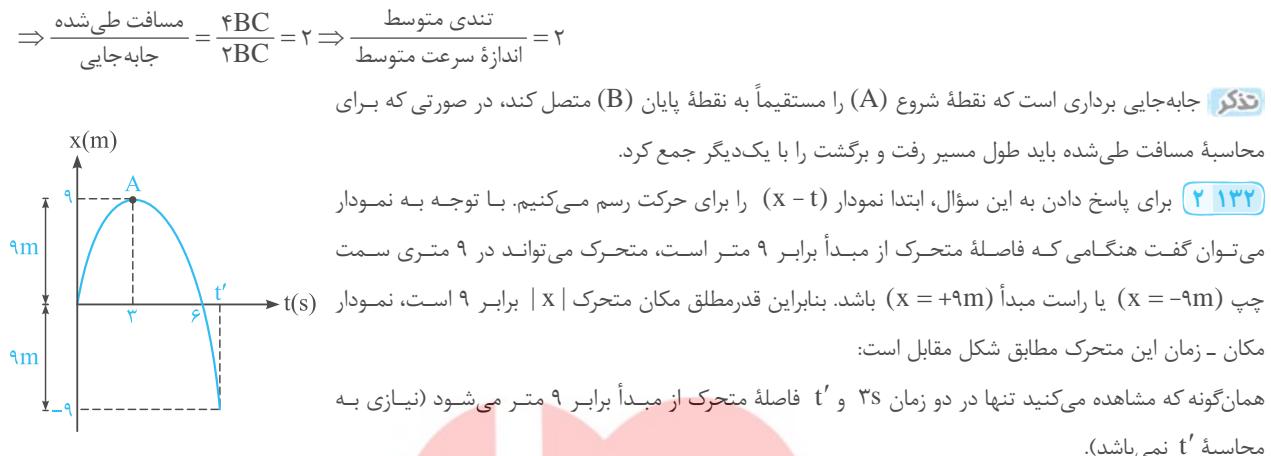
فصل اول: حرکت بر خط راست



طول برگشت طول رفت

$$\text{مسافت طی شده} = \overline{AC} + \overline{CB} = 3BC + BC = 4BC$$

جایه جایی متحرک



$$x = -t^2 + 6t \quad \text{رأس سهی} \quad \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a} \rightarrow t_A = -\frac{6}{2 \times (-1)} = 3s$$

$$x_A = -(3)^2 + 6 \times 3 = 9m \quad (\text{مکانی که متحرک در آن جا می‌ایستد})$$

نحوه به دست آوردن مختصات A:

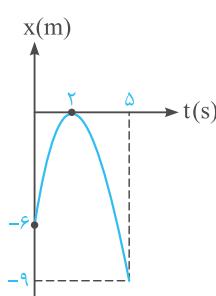
زمانی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$s_{av_1} = \frac{l_1}{\Delta t_1} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m/s}$$

در ادامه مسیر، متحرک از نقطه $x = 0$ به $x = -9$ m می‌رود و می‌توانیم بگوییم متحرک در کل حرکت، مسافت 15 m را در مدت $5s$ طی کرده است ($15m = 6 + 9$ m)، بنابراین تندی متوسط آن در کل زمان حرکتش برابر است با:

$$s_{av_2} = \frac{l_2}{\Delta t_2} = \frac{15}{5} = 3 \text{ m/s}$$

$$\frac{s_{av_1}}{s_{av_2}} = \frac{3}{3} = 1$$



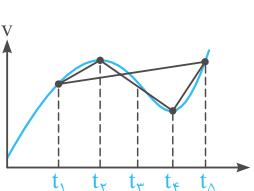
مطابق تعریف شتاب متوسط $s_{av} = \frac{|\vec{a}_{av}|}{\Delta t}$ ، کافی است سرعت در ابتداء و انتهای این بازه زمانی را داشته باشیم:

$$v = 0/3 \cos(60^\circ \pi t + 30^\circ) \rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \rightarrow v_1 = 0/3 \cos(0) = 0/15 \text{ m/s} \\ t_2 = 1/6 \text{ s} \rightarrow v_2 = 0/3 \cos(\pi + 30^\circ) = -0/15 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$s_{av} = \frac{|\vec{a}_{av}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|-0/15 - (0/15)|}{1/6} = \frac{0/3}{1/6} = 18 \text{ m/s}^2$$

همان‌طور که می‌دانیم، شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان، شتاب متوسط در آن بازه زمانی را نشان می‌دهد. در این سؤال شیب خط واصل بین دو نقطه از نمودار سرعت - زمان از (t_1 تا t_2)،

(t_2 تا t_3) و (t_3 تا t_4) مثبت بوده و تنها در بازه زمانی (t_4 تا t_5) منفی است. بنابراین در بازه (t_2 تا t_4)،



شتتاب متوسط با سایر بازه‌ها هم‌جهت نیست (برای راحت‌تر شدن مقایسه، همه خطوطی واصل موردنظر، در یک

شكل ترسیم شده است).