آشنایی با مبانی ریاضیات

فهرست مفاهیم کلیدی

۱ گزاره‌ها و گزاره‌نما (صفحه‌های ۲ تا ۶ کتاب درسی)
+ ۲ ترکیب گزاره‌ها (صفحه‌های ۶ تا ۱۰ کتاب درسی)
+ ۳ برخی هم‌ارزی‌های منطقی مهم (صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)
۴ انواع سورها و نقیضشان (صفحه‌های ۱۱ تا ۱۴ کتاب درسی)
۵ یادآوری مجموعه و زیرمجموعه، نماد ریاضی (صفحه‌های ۱۶ تا ۱۹ کتاب درسی)
۶ دو مجموعه مساوی (صفحه‌های ۱۹ و ۲۰ کتاب درسی)
۷ برخی خواص مربوط به اعمال بین مجموعه‌ها (صفحه‌های ۲۱ تا ۲۵ کتاب درسی)
+ ۸ برخی قوانین مهم مجموعه‌ها (صفحه‌های ۲۵ تا ۳۰ کتاب درسی)
+ ۹ ضرب دکارتی (صفحه‌های ۳۰ تا ۳۳ کتاب درسی)

	[سال ۹۸]		[سال ۹۹]		[سال ۱۴۰۰]		[سال ۱۴۰۱]		[۱۴۰۲ نوبت اول]		[۱۴۰۲ نوبت دوم]		[۱۴۰۳ نوبت اول]		[۱۴۰۳ نوبت دوم]		مجموع	کل
	تعداد	کد	تعداد	کد	تعداد	کد	تعداد	کد	تعداد	کد	تعداد	کد	تعداد	کد	تعداد	کد		
داخل	۴	۸,۷,۴,۳	۴	۸,۸,۹,۳	۲	۸,۲	۳	۹,۸,۳	۲	۸,۳	۱	۹	۱	۲	۱	۲	۱۸	۳۲
خارج	۳	۸,۴,۳	۴	۸,۸,۳,۹	۲	۸,۲	۳	۸,۸,۲			۱	۹			۱	۲	۱۴	

پیام مشاوره‌ای

این فصل به دو بخش کلی تقسیم می‌شه، منطق ریاضی و مجموعه‌ها. در بخش اول با مفهوم گزاره، گزاره‌نما و انواع سورها آشنا می‌شیم و با ترکیبشون گزاره‌هایی هم‌ارز می‌سازیم. از این بخش یک تست در کنکور مطرح می‌شه. در بخش دوم مفهوم مجموعه و اعمال روی مجموعه رو یادآوری کرده و حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه رو تعریف می‌کنیم. از این بخش گاهی یک تست در کنکور مطرح می‌شه.

آزمون تشخیصی مفاهیم کلیدی

یادنیوم یادنیوم

۱ کدام گزینه نادرست است؟

۱) ارزش گزاره‌نما $p(x)$ یا درست است یا نادرست.

۲) مجموعه مقادیری از x که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما $p(x)$ به یک گزاره تبدیل می‌شود را دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند.

۳) جدول ارزش ۵ گزاره، دارای ۳۲ حالت متمایز است.

۴) «حاصل جمع ۲ برابر عددی با ۳ برابر عددی دیگر، برابر ۷ است» یک گزاره‌نما است.

۲ در جدول ارزش گزاره‌ها $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$، تعداد حالت‌های درست کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳ اگر p و q دو گزارهٔ دلخواه باشند، گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ با کدام گزینه هم‌ارز است؟

۱) p ۲) T ۳) F ۴) $\sim p$

۴ ارزش کدام‌یک از گزاره‌های سوری زیر درست است؟

۱) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0$ ۲) $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0$ ۳) $\forall a \in \mathbb{R}; \frac{a^2+a}{a} = a+1$ ۴) $\exists y \in \mathbb{N}; y^2+3y+2 = 0$

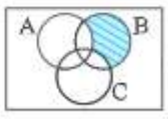
۵ اگر به مجموعهٔ A دو عضو اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۹۶ واحد افزوده می‌شود. تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ A برابر کدام است؟

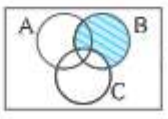
۱) ۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۸

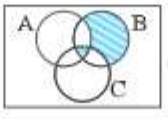
۶ اگر دو مجموعهٔ $\{5, 3x-y\}$ و $\{x+y, 3\}$ مساوی باشند، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های $\{x-1, y+2, 2x-y\}$ برابر کدام است؟

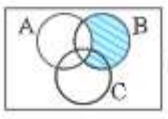
۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱۶

۷ کدام گزینه مجموعهٔ $(A \cup C)' \cap B$ را نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۸ ساده‌شدهٔ عبارت $[(A-B) \cup (A' \cup B')'] \cup A'$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) A' ۳) U ۴) A

۹ اگر $A = [-2, 1)$ و $B = [0, 3)$ باشند، مساحت ناحیهٔ $(A \times B) \cap (B \times A)$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

پاسخ

[۱] ..... گزینهٔ «۱»
[۲] ..... گزینهٔ «۲»
[۳] ..... گزینهٔ «۴»
[۴] ..... گزینهٔ «۱»
[۵] ..... گزینهٔ «۳»
[۶] ..... گزینهٔ «۲»
[۷] ..... گزینهٔ «۱»
[۸] ..... گزینهٔ «۳»
[۹] ..... گزینهٔ «۴»

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

۱ گزاره‌ها و گزاره‌نما { حداکثر پنج مطلب: ۱۵ دقیقه } (زمان شما:)

منطق ریاضی، دستور زبان ریاضی یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود و درستی یا نادرستی یک استدلال را مشخص می‌کند.

گزاره: جمله‌ای خبری که درست یا نادرست باشد را گزاره می‌گوییم. گزاره‌ها را با حروف p یا q یا r یا ... نمایش می‌دهیم.

نکته جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند.

نکته درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزارهٔ درست را با حرف «T» یا «د» و ارزش گزارهٔ نادرست را با حرف «F» یا «ن» نشان می‌دهیم.

بنابراین، برای ارزش هر گزاره، فقط دو حالت وجود دارد.

جدول ارزش گزاره‌ها: هر گزاره مانند p فقط دارای یک ارزش است و جدول ارزش آن به صورت مقابل است:

p
د
ن

در صورتی که دو گزارهٔ p و q داشته باشیم، $۲ \times ۲ = ۴$ حالت داریم و جدول ارزش آن به صورت مقابل است:

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نکته تعداد حالت‌ها (سطرهای) جدول ارزش گزاره‌ها برای n گزاره، برابر ۲^n است. به عنوان مثال برای سه گزاره p، q و r، $۲^۳ = ۸$ حالت وجود دارد و جدول آن به صورت مقابل است:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

تست

در جدول ارزش‌های ۷ گزاره، در چند حالت ارزش دقیقاً ۲ گزاره درست است؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۱ ۳) ۲۰ ۴) ۱۸

پاسخ در جدول ارزش‌های گزاره‌ها، $۲^۷$ حالت وجود دارد که در $\binom{۷}{۲} = ۲۱$ حالت آن ارزش دقیقاً ۲ گزاره درست است.

۱ ۲ ۳ ۴

گزاره‌نما: هر جملهٔ خبری را که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل می‌شود، گزاره‌نما می‌نامیم.

نکته یک گزاره‌نما دارای ارزش نیست. ولی اگر به جای متغیر مقدار قرار دهیم، دارای ارزش می‌شود. به عنوان مثال اگر در گزاره‌نمای «a عددی فرد است.» به جای a، عدد ۳ را قرار دهیم ارزش آن درست می‌شود.

دامنه متغیر گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیر قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف D نشان می‌دهیم.

مجموعه جواب گزاره‌نما: در هر گزاره‌نما، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن‌ها گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف S نشان می‌دهیم و داریم: $S \subseteq D$

مثال

مجموعه جواب گزاره‌نمای «$x^2 + 2x \leq 0$» با دامنه اعداد صحیح کدام است؟

۱) $[-2,0]$ ۲) $\{-1\}$ ۳) $\{-2,-1,0\}$ ۴) $(-2,0)$

پاسخ

$x^2 + 2x \leq 0 \Rightarrow x(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$

چون دامنه متغیر، اعداد صحیح است درنتیجه مجموعه جواب عبارت است از: $\{-2,-1,0\}$

۱ ۲ ۳ ۴

۲+ ترکیب گزاره‌ها {حداکثر زمان مطالعه: ۳۰ دقیقه} زمان شما:

دو گزارهٔ هم‌ارز: دو گزارهٔ p و q را هم‌ارز منطقی (هم‌ارزش) گوییم، هرگاه دارای ارزش یکسان باشند و آن را با نماد $p \equiv q$ نشان می‌دهیم.

نقیض یک گزاره: نقیض گزارهٔ p را به صورت $\sim p$ نشان می‌دهیم و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم و علامت $\sim$ را ناقض می‌نامیم.

نکته ۱- ارزش گزارهٔ $\sim p$ دقیقاً مخالف ارزش گزارهٔ p است و جدول ارزش گزارهٔ آن به صورت زیر است:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

۲- برای هر گزاره دلخواه p، داریم: $p \equiv (\sim p) \sim$ یعنی نقیضِ نقیض هر گزاره با خود آن گزاره هم‌ارز است. (قانون نقیض مضاعف)

۳- برای نوشتن نقیض یک گزاره عبارت «چنین نیست که» را در ابتدای جمله قرار می‌دهیم یا فعل جمله را منفی می‌کنیم.

مثال

نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) ۲ عددی زوج است.

ب) $a > b$

پاسخ الف) «چنین نیست که ۲ عددی زوج است» یا «۲ عددی زوج نیست» یا «۲ عددی فرد است».

ب) «چنین نیست که «$a > b$» یا «$a \not> b$» یا «$a \leq b$»

ترکیب فصلی دو گزاره: اگر p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «p یا q» را که با نماد «$p \vee q$» نشان می‌دهیم، ترکیب فصلی دو گزاره می‌نامیم.

به رابط منطقی «$\vee$» فاصل می‌گوییم. جدول ارزش گزارهٔ $p \vee q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

نکته ۱- گزاره $p \vee q$ فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

۲- در منطق ریاضی، $p \vee q$ به معنای «p یا q یا هر دو» است.

ترکیب عطفی دو گزاره: اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «p و q» را که با نماد «$p \wedge q$» نشان می‌دهیم، ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم. به رابط منطقی «$\wedge$» عاطف می‌گوییم. جدول ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

نکته گزارهٔ $p \wedge q$ فقط وقتی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

تست

کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) ۷ عددی اول است یا $\sqrt{۳}$ عددی گویا است.
۲) عدد ۲ زوج است یا تهران پایتخت ایران است.
۳) $۱۰ = ۶ + ۴$ و $۷ > ۵$
۴) عدد π گویا است و ۲۵ مربع کامل است.

پاسخ بررسی گزینه‌ها

۱) گزاره «۷ عددی اول است» درست و گزاره «$\sqrt{۳}$ عددی گویا است» نادرست است. درنتیجه ترکیب فصلی آن‌ها درست است.
۲) گزاره «عدد ۲ زوج است» درست و گزاره «تهران پایتخت ایران است» درست است. درنتیجه ترکیب فصلی آن‌ها درست است.
۳) گزاره «$۱۰ = ۶ + ۴$» درست و گزاره «$۷ > ۵$» درست است. درنتیجه ترکیب عطفی آن‌ها درست است.
۴) گزاره «عدد π گویا است» نادرست و گزاره «۲۵ مربع کامل است» درست است. درنتیجه ترکیب عطفی آن‌ها نادرست است.

۱ ۲ ۳ ۴

ترکیب شرطی دو گزاره: اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب «اگر p آن‌گاه q» را که با نماد «$p \Rightarrow q$» نشان می‌دهیم، ترکیب شرطی دو گزاره می‌نامیم. در این ترکیب شرطی، p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم. جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

نکته ۱- گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ ، فقط وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.
۲- در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر ارزش p (مقدم) نادرست باشد، می‌گوییم گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ بنا به انتفای مقدم درست است و ارزش آن به q (تالی) بستگی ندارد.
۳- در گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ ، اگر ارزش q (تالی) درست باشد، ارزش گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ همواره درست است.

تست

کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر گزارهٔ $q \Rightarrow p$ درست باشد، آن‌گاه گزاره $p \Rightarrow q$ نیز درست است.
۲) اگر ۴ عددی زوج باشد آن‌گاه $\sqrt{۱۴}$ مربع کامل است.
۳) گزاره «اگر $۷ > ۹$ آن‌گاه ۲ عددی اول است» درست است.
۴) اگر $\sim(۲ = ۴)$ باشد آن‌گاه ۳۱ عددی مرکب است.

پاسخ بررسی گزینه‌ها

۱) اگر p نادرست و q درست باشد، آن‌گاه گزاره $q \Rightarrow p$ درست ولی $p \Rightarrow q$ نادرست است.
۲) فرض درست و حکم نادرست است. درنتیجه گزارهٔ شرطی نادرست می‌باشد.
۳) چون «$۷ > ۹$» نادرست است، درنتیجه گزارهٔ شرطی بنا به انتفای مقدم درست است.
۴) «$\sim(۲ = ۴)$» درست ولی «۳۱ عددی مرکب است» نادرست است. درنتیجه گزارهٔ شرطی نادرست می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴

اگر ارزش p درست و r نادرست باشد، ارزش کدام گزاره همواره درست است؟

۱) $p \Rightarrow (q \wedge r)$
۲) $\sim p \wedge (r \Rightarrow q)$
۳) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
۴) $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$

پاسخ بررسی گزینه‌ها

۱) p درست و $q \wedge r$ نادرست است درنتیجه $p \Rightarrow (q \wedge r)$ نادرست می‌باشد.
۲) $p \sim$ نادرست و $r \Rightarrow q$ بنا به انتفای مقدم درست است و درنتیجه $\sim p \wedge (r \Rightarrow q)$ نادرست می‌شود.
۳) اگر q درست باشد، $p \wedge q$ درست و r نادرست خواهد بود. درنتیجه $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست می‌شود.
۴) $p \sim$ نادرست است. درنتیجه $\sim p \Rightarrow (q \wedge r)$ بنا به انتفای مقدم درست می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴

عکس گزارهٔ شرطی: اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد، آن‌گاه به گزارهٔ $q \Rightarrow p$ عکس گزاره می‌گوییم. یعنی برای به دست آوردن عکس گزارهٔ شرطی کافی است جای فرض و حکم را عوض کنیم.

عکس نقیض گزارهٔ شرطی: اگر $p \Rightarrow q$ یک گزاره شرطی باشد، آن‌گاه به گزارهٔ $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض گزاره می‌گوییم.

نکته هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم‌ارز است. یعنی: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

تست

عکس نقیض گزاره شرطی «اگر ۴ عددی زوج باشد آن‌گاه $\sqrt{۳}$ گنگ است» کدام است؟

۱) اگر ۴ عددی فرد باشد آن‌گاه $\sqrt{۳}$ گویا است.

۲) اگر ۴ عددی زوج باشد آن‌گاه $\sqrt{۳}$ گویا است.

۳) اگر $\sqrt{۳}$ گویا باشد آن‌گاه ۴ عددی فرد است.

۴) اگر $\sqrt{۳}$ گنگ باشد آن‌گاه ۴ عددی زوج است.

پاسخ در عکس نقیض گزاره شرطی، جای فرض و حکم را عوض کرده و هر دو را نقیض می‌کنیم. یعنی عکس نقیض گزارهٔ شرطی داده شده به صورت «اگر $\sqrt{۳}$ گویا باشد آن‌گاه ۴ عددی فرد است» می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴

نکته گاهی برای اثبات درستی یک گزاره شرطی، درستی عکس نقیض آن را بررسی می‌کنیم.

یعنی به جای این‌که از فرض به حکم برسیم، از نقیض حکم به نقیض فرض می‌رسیم. این نوع اثبات، همان برهان خلف است.

سؤال

ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $a^۲$ زوج باشد، آن‌گاه a عددی زوج است.

پاسخ به جای اثبات این گزارهٔ شرطی، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

($a^۲$ فرد است $\Rightarrow$ a فرد است) $\equiv$ (a زوج است $\Rightarrow$ $a^۲$ زوج است)

فرض کنیم a فرد است:

$$a = ۲k+۱ \Rightarrow a^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۲(۲k^۲ + ۲k) + ۱ = ۲k' + ۱$$

در نتیجه $a^۲$ نیز فرد است.

ترکیب دو شرطی دو گزاره: اگر p و q دو گزاره باشند، ترکیب عطفی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را با نماد $p \Leftrightarrow q$ نشان داده و به صورت «p اگر و تنها اگر q» می‌خوانیم و به آن ترکیب دو شرطی دو گزاره می‌گوییم. جدول ارزش گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

نکته

۱- گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ وقتی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

۲- گزارهٔ دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ را به صورت‌های «اگر p آن‌گاه q و برعکس» و «p شرط لازم و کافی برای q است» نیز می‌توان نوشت.

۳- بنا به تعریف گزارهٔ دو شرطی، همواره داریم:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

تست

ارزش کدام‌یک از گزاره‌های دو شرطی زیر نادرست است؟

۱) ۳ عددی اول است اگر و تنها اگر $۷ > ۵ + ۳$

۲) $۳ - > -۲ \Leftrightarrow -۳ < -۲$

۳) اگر ۱۵ عددی فرد باشد آن‌گاه $\sqrt{۵}$ عددی گویا است و برعکس.

۴) مرکب بودن عدد ۱۸ شرط لازم و کافی برای گنگ بودن عدد π است.

پاسخ بررسی گزینه‌ها

۱ : ارزش هر دو گزاره «۳ عددی اول است» و «$۷ > ۵ + ۳$» درست است. درنتیجه ارزش گزارهٔ دو شرطی آن‌ها درست است.

۲ : ارزش هر دو گزاره «$-۳ < -۲$» و «$۴ > ۳$» نادرست است. درنتیجه ارزش گزارهٔ دو شرطی آن‌ها درست است.

۳ : ارزش گزارهٔ «۱۵ عددی فرد است» درست و ارزش گزارهٔ «$\sqrt{۵}$ عددی گویا است» نادرست است. درنتیجه ارزش گزارهٔ دو شرطی آن‌ها نادرست است.

۴ : ارزش هر دو گزاره «مرکب بودن عدد ۱۸» و «گنگ بودن عدد π» درست است. درنتیجه ارزش گزارهٔ دو شرطی آن‌ها درست می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴

در چند حالت از جدول ارزش گزاره $(p\vee q) \Leftrightarrow (\sim q \wedge r)$ ، ارزش گزاره درست است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ

p	q	r	$p\vee q$	$\sim q$	$\sim q\wedge r$	$(p\vee q)\Leftrightarrow(\sim q\wedge r)$
د	د	د	د	ن	ن	ن
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن	د	ن	د

با توجه به جدول ارزش گزاره، در دو حالت ارزش درست است.

۱ ۲ ۳ ۴

۳ برخی هم‌ارزی‌های منطقی مهم {حداکثر زمان مطالعه: ۳۰ دقیقه} زمان شما:

گزاره همیشه درست: به گزاره‌ای که ارزش آن در همه حالت‌ها درست باشد، گزاره همیشه درست می‌گوییم و آن را با T نشان می‌دهیم.

گزاره همیشه نادرست: به گزاره‌ای که ارزش آن در همه حالت‌ها نادرست باشد، گزاره همیشه نادرست می‌گوییم و آن را با F نشان می‌دهیم.

نکات - برای هر گزاره دلخواه p داریم:

۱- $p\vee p\equiv p \ , \ p\wedge p\equiv p$

۲- $p\vee F\equiv p \ , \ p\wedge F\equiv F$

۳- $p\vee T\equiv T \ , \ p\wedge T\equiv p$

۴- $p\vee \sim p\equiv T \ , \ p\wedge \sim p\equiv F$

کدام گزاره همواره درست است؟

۱) $p\wedge(p\vee\sim p)$ ۲) $(p\wedge F)\vee\sim p$ ۳) $(p\wedge T)\vee\sim p$ ۴) $p\vee(p\wedge\sim p)$

پاسخ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱: $p\wedge(p\vee\sim p)\equiv p\wedge T\equiv p$

۲: $(p\wedge F)\vee\sim p\equiv F\vee\sim p\equiv\sim p$

۳: $(p\wedge T)\vee\sim p\equiv p\vee\sim p\equiv T$

۴: $p\vee(p\wedge\sim p)\equiv p\vee F\equiv p$

۱ ۲ ۳ ۴

هم‌ارزی‌های منطقی: اگر p ، q و r سه گزاره دلخواه باشند، در این صورت داریم:

۱- قانون جابه‌جایی: $p\vee q\equiv q\vee p \ , \ p\wedge q\equiv q\wedge p \ , \ p\Leftrightarrow q\equiv q\Leftrightarrow p$

۲- قانون شرکت‌پذیری: $p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r \ , \ p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r \ , \ p\Leftrightarrow(q\Leftrightarrow r)\equiv(p\Leftrightarrow q)\Leftrightarrow r$

۳- قانون توزیع‌پذیری: $p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) \ , \ p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

نکته عکس قانون توزیع‌پذیری را فاکتورگیری می‌گوییم: $(p\vee q)\wedge(p\vee r)\equiv p\vee(q\wedge r)$

۴- قانون دمورگان: $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q \ , \ \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$

کدام گزاره همواره درست است؟

۱) $\sim p \wedge (p \wedge q)$ ۲) $p \wedge (\sim p \vee q)$ ۳) $\sim (p \vee q) \vee p$ ۴) $p \vee \sim (p \wedge q)$

پاسخ بررسی گزینه‌ها

۱) با استفاده از قانون شرکت‌پذیری داریم: $\sim p \wedge (p \wedge q) \equiv (\underbrace{\sim p \wedge p}_{F}) \wedge q \equiv F$

۲) با استفاده از قانون توزیع‌پذیری داریم: $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv (\underbrace{p \wedge \sim p}_{F}) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$

۳) با استفاده از قانون‌های دمورگان و توزیع‌پذیری داریم: $\sim (p \vee q) \vee p \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee p \equiv (\underbrace{\sim p \vee p}_{T}) \wedge (\sim q \vee p) \equiv \sim q \vee p$

۴) با استفاده از قانون‌های دمورگان و شرکت‌پذیری داریم: $p \vee \sim (p \wedge q) \equiv p \vee (\sim p \vee \sim q) \equiv (\underbrace{p \vee \sim p}_{T}) \vee \sim q \equiv T$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

۵- قانون جذب: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ و $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

(قانون جذب بیان می‌کند که اگر در یک گزاره مرکب، هم ترکیب عطفی و هم فصلی داشته و یک گزاره تکرار شده باشد، جواب همان گزاره تکراری است.)

۶- قانون شبه جذب: $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ و $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

گزاره $[(p \wedge q) \vee [(q \vee r) \wedge ((q \vee p) \wedge q)]$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟

۱) q ۲) $p \vee q$ ۳) p ۴) $q \vee r$

پاسخ با استفاده از قانون جذب داریم:

$$(p \wedge q) \vee [(q \vee r) \wedge ((\underbrace{q \vee p}_{q}) \wedge q)] \equiv (p \wedge q) \vee [\underbrace{(q \vee r) \wedge q}_{q}] \equiv (p \wedge q) \vee q \equiv q$$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

۷- قانون گزاره شرطی: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

نکته هم‌ارزی‌های زیر، با استفاده از قانون گزاره شرطی به دست می‌آیند:

$p \Rightarrow p \equiv T$

$p \Rightarrow F \equiv \sim p$

$p \Rightarrow T \equiv T$

$F \Rightarrow p \equiv T$

$T \Rightarrow p \equiv p$

نکته گزاره $p \Rightarrow (p \vee q)$ یک گزاره همواره درست است و به آن قانون ادخال فاصل می‌گوییم و گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow p$ یک گزاره همواره درست است و به آن قانون حذف عاطف می‌گوییم.

گزاره $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow [q \Rightarrow (\sim q \wedge r)]$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

۱) q ۲) $p \vee q$ ۳) $\sim q$ ۴) $p \vee \sim q$

پاسخ (جذب و گزاره شرطی)

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow [q \Rightarrow (\sim q \wedge r)] \equiv \sim (\sim p \vee q) \vee [\underbrace{\sim q \vee (\sim q \wedge r)}_{\sim q}]$$

$\equiv (p \wedge \sim q) \vee \sim q \equiv \sim q$ (دمورگان و جذب)

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

نکته نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت مقابل است: $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

سؤال

نقیض گزاره «اگر a از b بزرگ‌تر باشد آن‌گاه c زوج است» را بنویسید.

پاسخ: a از b بزرگ‌تر است و c زوج نیست.

۸- ترکیب شرطی از چپ در همه ترکیب‌ها توزیع‌پذیر است. یعنی:

$$p \Rightarrow (q \vee r) \equiv (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$$
$$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$$
$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$
$$p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$$

نکته هم‌ارزی‌های زیر، با استفاده از قانون گزاره دو شرطی به‌دست می‌آیند:

$$p \Leftrightarrow p \equiv T \ , \ p \Leftrightarrow \sim p \equiv F \ , \ p \Leftrightarrow T \equiv p \ , \ p \Leftrightarrow F \equiv \sim p$$

تست

کدام هم‌ارزی همواره نادرست است؟

۱) $(p \Leftrightarrow \sim p) \wedge p$ ۲) $(p \Leftrightarrow p) \vee p$ ۳) $(p \Leftrightarrow T) \wedge p$ ۴) $p \vee (p \Leftrightarrow F)$

پاسخ: بررسی گزینه‌ها

۱: $(p \Leftrightarrow \sim p) \wedge p \equiv F \wedge p \equiv F$

۲: $(p \Leftrightarrow p) \vee p \equiv T \vee p \equiv T$

۳: $(p \Leftrightarrow T) \wedge p \equiv p \wedge p \equiv p$

۴: $p \vee (p \Leftrightarrow F) \equiv p \vee \sim p \equiv T$

۱ ۲ ۳ ۴

۹- نقیض گزاره دو شرطی: $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

۱۰- عکس نقیض گزاره دو شرطی: $p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$

تست

گزاره $p \Leftrightarrow q$ با کدام گزاره هم‌ارز نیست؟

۱) $(\sim q \vee p) \vee (q \vee \sim p)$ ۲) $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$ ۳) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ ۴) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

پاسخ: در ۱، داریم: $(\sim q \vee p) \vee (q \vee \sim p) \equiv (q \Rightarrow p) \vee (p \Rightarrow q)$

که با گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز نیست.

۱ ۲ ۳ ۴

۴ انواع سورها و نقیضشان {حداکثر زمان مطالعه: ۱۵ دقیقه} زمان شما:

سورها: نمادهایی هستند که قبل از گزاره‌نما قرار می‌گیرند و گزاره‌نما را به یک گزاره با ارزش درست یا نادرست تبدیل می‌کنند. سورها دو نوع‌اند:

۱- سور عمومی: اگر بخواهیم خاصیتی را به همه عضوهای یک مجموعه نسبت دهیم، از سور عمومی استفاده می‌کنیم و آن را با نماد $\forall$ نشان می‌دهیم. (نماد $\forall$ از ابتدای کلمه All به معنی همه گرفته شده است.) سور عمومی به صورت «به ازای هر» و «به ازای تمام مقادیر» و ... خوانده می‌شود.

به عنوان مثال گزاره «$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$» که «مربع هر عدد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی صفر است» خوانده می‌شود، یک گزاره با سور عمومی است.

۲- سور وجودی: اگر بخواهیم خاصیتی را به بعضی عضوهای مجموعه (حداقل یک عضو) نسبت دهیم از سور وجودی استفاده می‌کنیم و آن را با نماد $\exists$ نشان می‌دهیم (نماد $\exists$ از ابتدای کلمه Exist به معنی وجود دارد گرفته شده است) سور وجودی به صورت «وجود دارد»، «به ازای بعضی مقادیر» و ... خوانده می‌شود.

به عنوان مثال گزاره «$\exists x \in \mathbb{Z}; x = 3k$» که «عدد صحیحی وجود دارد که مضرب ۳ است.» خوانده می‌شود، یک گزاره با سور وجودی است.

نکته ارزش یک گزاره با سور عمومی وقتی درست است که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند. به عبارت دیگر مثال نقض نداشته باشد. و ارزش یک گزاره با سور وجودی وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد. به عبارت دیگر حداقل یک عضو از دامنه متغیر بتوان یافت که گزاره‌نما را به گزاره‌ای درست تبدیل کند.

کدام گزاره درست است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^۲-۱}{x-۱} = x+۱$ ۲) $\exists x \in \mathbb{N}; ۲x^۲ + ۳x + ۱ = ۰$ ۳) $\exists x \in \mathbb{Z}; |x| \leq ۰$ ۴) $\forall x \in \mathbb{R}; \tan x . \cot x = ۱$

پاسخ (بررسی گزینه‌ها)

۱) نادرست است؛ زیرا اگر $x = ۱$ باشد، گزاره‌نما به یک گزاره نادرست تبدیل می‌شود.

۲) نادرست است؛ زیرا ریشه‌های معادله درجه دوم، -۱ و $\frac{-۱}{۲}$ است که طبیعی نیستند.

۳) درست است؛ زیرا $x = ۰$ این گزاره‌نما را به گزاره‌ای درست تبدیل می‌کند و مجموعه جواب تهی نیست.

۴) نادرست است؛ زیرا $x = \frac{\pi}{۲}$ یک مثال نقض برای آن محسوب می‌شود.

۱ ۲ **۳** ۴

گزاره‌های سوری دوگانه: اگر یک گزاره‌نمای دو متغیری داشته باشیم، در این صورت باید برای هر دو متغیر آن سور قرار دهیم. به عنوان مثال: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}; xy = ۱$ که به صورت «برای هر عدد حقیقی، عددی صحیح وجود دارد به طوری که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۱ است.» خوانده می‌شود.

گزاره «عددی صحیح وجود دارد که از مربع بعضی از عددهای حقیقی بزرگ‌تر است.» با استفاده از نمادهای ریاضی به کدام صورت است؟

۱) $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R}; x > y^۲$ ۲) $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{R}; x > y^۲$

۳) $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{R}; x < y^۲$ ۴) $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{Z}; x > y^۲$

پاسخ (وجود دارد) و (بعضی) سورهای وجودی هستند. درنتیجه گزاره‌ای که شامل دو سور وجودی است مورد قبول است.

۱ **۲** ۳ ۴

نقیض گزاره‌های سوری: برای نقیض کردن گزاره‌های دارای سور، کافی است نوع سور را عوض کرده (یعنی به جای $\forall$ از $\exists$ و به جای $\exists$ از $\forall$ استفاده کنیم.) و گزاره‌نمای داده شده را نقیض کنیم. یعنی:

$$\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

$$\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

نقیض گزاره «$\forall x \in \mathbb{Z}; |x-۱| < ۲$» کدام است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{Z}; |x-۱| \geq ۲$ ۲) $\exists x \in \mathbb{Z}; |x-۱| > ۲$ ۳) $\forall x \in \mathbb{Z}; |x-۱| > ۲$ ۴) $\exists x \in \mathbb{Z}; |x-۱| \geq ۲$

پاسخ

$$\sim (\forall x \in \mathbb{Z}; |x-۱| < ۲) \equiv \exists x \in \mathbb{Z}; \sim (|x-۱| < ۲)$$
$$\equiv \exists x \in \mathbb{Z}; |x-۱| \geq ۲$$

۱ ۲ ۳ **۴**

نکته برای نقیض کردن گزاره‌هایی که دارای دو سور هستند نیز سورها را عوض کرده و گزاره‌نما را نقیض می‌کنیم. به عنوان مثال:

$$\sim (\forall x, \exists y; p(x,y)) \equiv \exists x, \forall y; \sim p(x,y)$$

نقیض گزاره «$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; y = \sqrt{x^۲+۲}$» کدام است؟

۱) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; y \neq \sqrt{x^۲+۲}$ ۲) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; y \neq \sqrt{x^۲+۲}$

۳) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; y \neq \sqrt{x^۲+۲}$ ۴) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; y = \sqrt{x^۲+۲}$

پاسخ

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}; y = \sqrt{x^۲+۲}) \equiv \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; \sim (y = \sqrt{x^۲+۲})$$
$$\equiv \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}; y \neq \sqrt{x^۲+۲}$$

۱ ۲ **۳** ۴

پاسخ‌نامه

کد مفاهیم کلیدی [۲،۱ و ۳] (راهنمای علائم)
سؤالات سخت و چالشی

پاسخ‌نامهٔ تشریحی فصل اول

۱ (۲) [۱]

جمله‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) این جمله پرسشی است و گزاره نیست.

ب) نقطهٔ $(-۱,۱)$ در ضابطه $y = x^۲$ صدق می‌کند، در نتیجه گزاره‌ای درست است.

پ) پیشامد آمدن عدد اول در پرتاب یک تاس $\{۲,۳,۵\}$ است و احتمال رخ دادن آن برابر $\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۶}$ است. در نتیجه گزاره‌ای نادرست است.

ت) نامعادله $-(x-۴)^۲ \leq ۰$ همواره برقرار است و در نتیجه گزاره‌ای درست است.

۲ (۲) [۱]

دامنه متغیر این گزاره‌نما اعداد طبیعی است و مجموعه جواب آن برابر است با:

$\{۲,۳,۵,۷\}$

۳ (۳) [۱]

جدول ارزش‌های n گزاره، دارای ۲^n سطر است. در نتیجه $۲^n = ۳۲ \Rightarrow n = ۵$.

تعداد سطرهایی که ارزش دقیقاً ۲ گزاره نادرست باشد، برابر است با: $\binom{۵}{۲} = ۱۰$

۴ (۴) [۱]

اگر تعداد گزاره‌ها برابر n باشد، در این صورت جدول ارزش‌های گزاره‌ها دارای ۲^n سطر است. بنابراین داریم:

$$۲^{n+۲} = ۲^n + ۱۲ \Rightarrow ۲^{n+۲} - ۲^n = ۱۲ \Rightarrow ۲^n(۲^۲ - ۱) = ۱۲$$
$$\Rightarrow ۲^n = ۴ \Rightarrow n = ۲$$

۵ (۳) [۱]

جدول ارزش‌های ۶ گزاره دارای $۲^۶ = ۶۴$ حالت است. تعداد حالت‌هایی که ارزش حداقل ۳ گزاره درست باشد، برابر $\binom{۶}{۶} + \binom{۶}{۵} + \binom{۶}{۴} + \binom{۶}{۳}$ است و داریم:

$$P(A) = \frac{۲۰ + ۱۵ + ۶ + ۱}{۶۴} = \frac{۴۲}{۶۴} = \frac{۲۱}{۳۲}$$

۶ (۱) [۱]

بررسی گزینه‌ها

۱) پرتاب یک تاس $D = \{۱,۲,...,۶\}$ است و به ازای هر یک از عضوهای دامنه احتمال رخ دادن برابر $\frac{۱}{۶}$ است. در نتیجه $S = \{۱,۲,...,۶\}$

۲) دامنه متغیر اعداد حقیقی است ولی مجموعه جواب برابر $\{۱,\frac{۱}{۲}\}$ است.

۳) دامنه متغیر اعداد صحیح است ولی مجموعه جواب برابر $\{...,-۳,۱.۵,...\}$ است.

۴) دامنه متغیر $x \geq ۱ \Rightarrow x - ۱ \geq ۰$ است ولی مجموعه جواب برابر است با:

$$\sqrt{x-۱} < ۲ \Rightarrow x - ۱ < ۴ \Rightarrow x < ۵ \Rightarrow S = [۱,۵)$$

۷ (۴) [۱]

در معادله $۵x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$ (چون $a + c = b$) مجموعه جواب برابر $\{-۱,\frac{-۲}{۵}\}$ است. اگر دامنه متغیر اعداد صحیح باشد، $x = -۱$ جواب گزاره‌نماست و مجموعه جواب تک عضوی می‌شود.

۸ (۳) [۱]

در پرتاب یک تاس با فضای نمونه $S = \{۱,۲,...,۶\}$ احتمال رخ دادن A وقتی برابر $\frac{۱}{۳}$ است که پیشامد A دو عضوی باشد:

$$P(A) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

و تعداد انتخاب مجموعه‌های دو عضوی از مجموعه ۶ عضوی برابر است با:

$$\binom{۶}{۲} = ۱۵$$

۹ (۳) [۱]

در پرتاب یک تاس، اگر پیشامد زوج بودن باشد: $A = \{۲,۴,۶\}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

اگر عدد اول بودن باشد:

$$A = \{۲,۳,۵\} \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

اگر فرد بودن باشد:

$$A = \{۱,۳,۵\} \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

اگر پیشامد A بزرگ‌تر از عدد ۴ آمدن باشد:

$$A = \{۵,۶\} \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

۱۰ (۳) [۲]

بررسی گزینه‌ها

۱) هر دو گزاره نادرست هستند، در نتیجه ترکیب فصلی آن‌ها نیز نادرست است.

۲) گزاره «۳ زوج است» نادرست است و ترکیب عطفی آن با هر گزاره‌ای نادرست است.

۳) گزاره «$۴ \neq ۴ \sim$» درست است و ترکیب فصلی آن با هر گزاره‌ای درست است.

۴) گزاره «$۶ \neq ۵ + ۱$» نادرست است، در نتیجه ترکیب عطفی آن با هر گزاره‌ای نادرست است.

۱۱ (۱) [۲]

گزاره p درست و گزاره q نادرست است.

بررسی گزینه‌ها

۱) $p \sim$ نادرست است. در نتیجه گزاره شرطی $p \sim \Rightarrow q$ بنا به انتفای مقدم درست است.

۲) چون q نادرست است، در نتیجه $p \wedge q$ نادرست است.

۳) q و $p \sim$ هر دو نادرست هستند، بنابراین $p \sim \vee q$ نادرست است.

۴) p درست و q نادرست است، بنابراین گزاره دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ نادرست است.

۱۲ (۱) [۲]

عکس نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $q \sim \Rightarrow p \sim$ است. یعنی جای فرض و حکم را عوض کرده و هر دو را نقیض می‌کنیم. بنابراین عکس نقیض گزاره شرطی داده شده برابر است با: $(۳ \geq ۱) \Rightarrow (۳ \times ۴ \neq ۱۲)$

۱۳ (۴) [۲]

می‌دانیم هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است. یعنی:

($n^۲$ مضرب ۳ نیست $\Rightarrow$ n مضرب ۳ نیست) $\equiv$ (n مضرب ۳ $\Rightarrow$ $n^۲$ مضرب ۳)

بنابراین در عکس نقیض، فرض «n مضرب ۳ نیست» می‌باشد.

۱۴ (۱) [۲]

$(p \sim) \sim$ درست نیست، در نتیجه p نادرست است بنابراین $p \sim$ درست است و $q \sim$ نادرست است در نتیجه q درست است.

kgoo.ir

۱۵ ۳ [۲]

چون گزاره p درست است، در نتیجه گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ وقتی درست است که q نیز درست باشد. بنابراین:

بررسی گزینه‌ها

۱) p درست و $\sim q$ نادرست است، در نتیجه $p \wedge \sim q$ نادرست می‌شود.

۲) p درست و $\sim q$ نادرست است، بنابراین $p \Rightarrow \sim q$ نادرست می‌شود.

۳) p درست و q نیز درست است، در نتیجه $p \wedge q$ درست خواهد بود.

۴) $\sim p$ نادرست و $\sim q$ نیز نادرست است، بنابراین $\sim p \vee \sim q$ نادرست است.

۱۶ ۱ [۲]

چون گزاره شرطی $q \Rightarrow (r \Rightarrow p)$ نادرست است، در نتیجه q درست و $r \Rightarrow p$ نادرست است. و از نادرست بودن $r \Rightarrow p$ نتیجه می‌گیریم r درست و p نادرست می‌باشد.

در ۱ ، r درست و $q \wedge p$ نادرست است. در نتیجه $r \Rightarrow (q \wedge p)$ نادرست خواهد بود.

۱۷ ۴ [۲]

چون گزاره شرطی $(p \wedge r) \Rightarrow (q \vee s)$ نادرست است، در نتیجه $p \wedge r$ درست (در نتیجه هر دو گزاره p و r درست هستند) و $q \vee s$ نادرست (در نتیجه هر دو گزاره q و s نادرست هستند) است. در ۴ ، p و $\sim s$ درست هستند، در نتیجه ترکیب عطفی آن‌ها نیز درست است.

۱۸ ۴ [۲]

گزاره p درست است، در نتیجه $\sim p$ نادرست است. بنابراین $p \wedge r \sim$ نادرست است و بنا به انتفای مقدم $(\sim p \wedge r) \Rightarrow q$ همواره درست می‌باشد.

۱۹ ۲ [۲]

q نادرست است، در نتیجه $\sim q$ درست می‌باشد. بنابراین $r \Rightarrow \sim q$ همواره درست است و نتیجه می‌گیریم $p \Rightarrow (r \Rightarrow \sim q)$ نیز درست می‌باشد. دقت کنید در یک گزاره شرطی اگر حکم درست باشد، آن گزاره مرکب همواره درست است و به ارزش فرض بستگی ندارد.

۲۰ ۳ [۲]

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر r درست باشد، در این صورت:

$$r \sim \equiv \text{ن} \equiv \text{ن} \Rightarrow \text{د} \equiv (\text{ن} \Rightarrow \text{د}) \Rightarrow (\text{د} \Rightarrow \text{د})$$

حالت دوم: اگر r نادرست باشد، در این صورت:

$$r \sim \equiv \text{د} \equiv \text{د} \Rightarrow \text{ن} \equiv (\text{ن} \Rightarrow \text{ن}) \Rightarrow (\text{ن} \Rightarrow \text{د})$$

و در هر دو حالت گزاره با $r \sim$ هم‌ارز است.

۲۱ ۲ [۱]

می‌دانیم ترکیب عطفی دو گزاره زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشند.

بررسی گزینه‌ها

۱) $\text{ن} \equiv \text{د} \wedge \text{ن} \equiv (\text{د} \Rightarrow \text{ن}) \wedge (\text{ن} \Rightarrow \text{د})$

۲) $\text{د} \equiv \text{د} \wedge \text{د} \equiv (\text{ن} \Rightarrow \text{ن}) \wedge (\text{ن} \Rightarrow \text{ن})$

۳) $\text{ن} \equiv \text{ن} \wedge \text{د} \Rightarrow (\text{ن} \Rightarrow \text{د}) \wedge (\text{د} \Rightarrow \text{د})$

۴) $\text{ن} \equiv \text{ن} \wedge \text{د} \equiv (\text{ن} \Rightarrow \text{د}) \wedge (\text{د} \Rightarrow \text{ن})$

۲۲ ۱ [۲]

روش اول: جدول ارزش گزاره‌ها را تشکیل می‌دهیم:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge r \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	د
د	ن	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	ن	ن	د

بنابراین گزاره شده همواره درست است.

روش دوم:

$$\begin{aligned}((p \Rightarrow q) \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) &\equiv \sim((\sim p \vee q) \wedge r) \vee (\sim p \vee r) \\ &\equiv ((p \wedge \sim q) \vee \sim r) \vee (\sim p \vee r) \\ &\equiv ((p \wedge \sim q) \vee \sim p) \vee (\sim r \vee r) \\ &\equiv ((p \wedge \sim q) \vee \sim p) \vee T \\ &\equiv T\end{aligned}$$

۲۳ ۴ [۲]

روش اول: جدول ارزش گزاره را تشکیل می‌دهیم:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q \vee r$	$[p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow (\sim p \vee \sim q \vee r)$
د	د	د	د	د	ن	ن	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	ن	ن	د
د	ن	د	ن	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	د	د	ن	د	د
ن	د	ن	ن	د	د	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د	د	د	د	د

بنابراین گزاره داده شده همواره درست است.

روش دوم:

$$\begin{aligned}&[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow (\sim p \vee \sim q \vee r) \\ &\equiv \sim[\sim(p \wedge q) \vee r] \vee (\sim p \vee \sim q \vee r) \\ &\equiv \sim(\sim p \vee \sim q \vee r) \vee (\sim p \vee \sim q \vee r) \\ &\equiv T\end{aligned}$$

۲۴ ۲ [۲]

گزاره شرطی وقتی نادرست است که فرض درست و حکم نادرست باشد. از این‌که $p \vee q$ نادرست است نتیجه می‌گیریم p و q هر دو نادرست هستند و از درست بودن $q \vee (r \Rightarrow p)$ نتیجه می‌گیریم $r \Rightarrow p$ باید درست باشد، پس r نادرست می‌باشد.

کنکور
جدید

کنکور داخل ۱۴۰۴ (نوبت اول)

۱. A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ مرجع U هستند. اگر $A \cup B' \subseteq A \cap B$ باشد، کدام مورد همواره برقرار است؟ (رشتهٔ ریاضی)

۱) $B = U$ ۲) $A = U$ ۳) $B = A$ ۴) $A = \varnothing$

۲. گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (رشتهٔ ریاضی)

۱) $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$ ۲) $\sim[\sim(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$

۳) $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$ ۴) $\sim[\sim(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

۳. اگر انحراف ۵ دادهٔ آماری از $\bar{x}$، به ترتیب برابر -۱، -۵، -۶، -۷ و ۴ باشد، واریانس داده‌های اصلی کدام است؟ (رشتهٔ ریاضی)

۱) ۱۵/۶ ۲) ۱۶/۴ ۳) ۲۴/۶ ۴) ۲۵/۴

۴. برای دو پیشامد A و B از فضای نمونهٔ S، روابط $P(A - B) = P(A)P(B')$ و $P(A) = ۱/۶P(B)$ برقرار است. اگر $P(A' \cap B') = ۰/۲۵$ باشد، مقدار $P(A \cup B')$ کدام است؟ (رشتهٔ ریاضی)

۱) $\frac{۲۷}{۴۰}$ ۲) $\frac{۱۳}{۲۰}$ ۳) $\frac{۱۷}{۲۰}$ ۴) $\frac{۳۱}{۴۰}$

۵. میانگین و واریانس چهار عدد a, b, c, d به ترتیب ۳ و ۱/۵ است. واریانس داده‌های $5a, 5b, 5c, 5d$ کدام است؟ (رشتهٔ تجربی)

۱) ۰/۷۵ ۲) ۰/۹۴ ۳) ۱/۶۵ ۴) ۱/۸۴

۶. در پرتاب ۱ تاس و ۳ سکه، با کدام احتمال تعداد دفعاتی که سکه رو می‌آید ۳ برابر عدد روی تاس است؟ (رشتهٔ تجربی)

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۷. احتمال اینکه نیلوفر در درس ریاضی قبول شود $\frac{۲}{۳}$ احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال آنکه فقط دوستش در درس ریاضی قبول شود برابر $\frac{۳}{۸}$ باشد، با کدام احتمال هیچ‌کدام در درس ریاضی قبول نمی‌شوند؟ (رشتهٔ تجربی)

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

کنکور داخل ۱۴۰۴ (نوبت دوم)

۱. ساده‌شدهٔ عبارت $[(A \cup B) \cap (B \cap A) - B'] \cup [(A' \cap B)$ کدام است؟ (رشتهٔ ریاضی)

۱) $A - B$ ۲) $B - A$ ۳) B ۴) A

۲. گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (رشتهٔ ریاضی)

۱) $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$ ۲) $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

۳) $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$ ۴) $\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

۳. به ۱۶ دادهٔ آماری با واریانس ۴۰، دو دادهٔ جدید اضافه می‌کنیم. اگر میانگین داده‌های جدید تغییر نکند ولی واریانس آن‌ها ۱ واحد افزایش یابد، اختلاف دو دادهٔ جدید کدام است؟ (رشتهٔ ریاضی)

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

۴. در یک کلاس ۱۰نفره که هیچ دو نفری از آن‌ها هم‌قد نیستند، دو دانش‌آموز پشت سر هم به تصادف انتخاب کرده و مشاهده می‌کنیم که دومی از اولی کوتاه‌قدتر است. احتمال اینکه دانش‌آموز اول بلندقدترین عضو کلاس باشد، کدام است؟ (رشتهٔ ریاضی)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۳ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۱

۵. در یک کیسه کارت‌هایی به شمارهٔ ۱ تا ۸ وجود دارد. ۳ کارت به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم. با کدام احتمال یکی از اعداد روی کارت‌ها شمارنده دوتای دیگر است؟ (رشتهٔ تجربی)

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۵۶}$ ۴) $\frac{۲۵}{۵۶}$

۶. در یک ظرف ۵ مهره سیاه و تعدادی مهره سبز وجود دارد. دو مهره به تصادف از ظرف خارج می‌شود. احتمال اینکه حداقل یک مهره سیاه باشد، برابر $\frac{۵}{۶}$ است. تعداد مهره سبز چقدر از تعداد مهره سیاه کمتر است؟ (رشتهٔ تجربی)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۷. ضریب تغییرات داده‌های ۱۶، ۱۶/۱، ۲/۱، ۰۸/۱، ۱/۱ کدام است؟ (رشتهٔ تجربی)

۱) $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ ۲) $\frac{۱}{۳\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۱}{۶\sqrt{۳}}$ ۴) $\frac{۱}{۷\sqrt{۵}}$

پاسخ‌نامه

کد مفاهیم کلیدی [۲،۱و۳] — درجه سختی (۴۵٪)

کنکور داخل ۱۴۰۴ (نوبت اول)

۱ ① [۵] ••○

بررسی گزینه‌ها

۱ $B = U \Rightarrow A \cup \varnothing \subseteq A \cap U \Rightarrow A \subseteq A$ ✓

۲ $A = U \Rightarrow U \cup B' \subseteq U \cap B \Rightarrow U \subseteq B$ ×

۳ $B = A \Rightarrow A \cup A' \subseteq A \cap A \Rightarrow U \subseteq A$ ×

۴ $A = \varnothing \Rightarrow \varnothing \cup B' \subseteq \varnothing \cap B \Rightarrow B' \subseteq \varnothing$ ×

۲ ④ [۳] ••○

$$\sim p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)$$
$$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)$$
$$\equiv [(p \vee q) \wedge \sim q] \vee [(p \vee q) \wedge \sim p]$$
$$\equiv [(p \wedge \sim q) \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F}] \vee [\underbrace{(p \wedge \sim p)}_{F} \vee (q \wedge \sim p)]$$
$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$
$$\equiv \sim [\sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim (q \wedge \sim p)]$$
$$\equiv \sim [(\sim p \vee q) \wedge \sim (\sim p \wedge q)]$$

۳ ② [۲۳] ••○

اگر از داده‌ها y واحد کم کنیم، واریانس تغییری نمی‌کند. بنابراین کافیست واریانس اعداد داده‌شده را به‌دست آوریم:

$$\bar{x} = \frac{-۱-۵-۶-۷+۴}{۵} = -۳$$
$$\sigma^۲ = \frac{(-۱+۳)^۲ + (-۵+۳)^۲ + (-۶+۳)^۲ + (-۷+۳)^۲ + (۴+۳)^۲}{۵}$$
$$= \frac{۴+۴+۹+۱۶+۴۹}{۵} = \frac{۸۲}{۵} = ۱۶/۴$$

۴ ③ [۱۷] ••○

چون داریم: $P(A-B) = P(A \cap B') = P(A)P(B')$

درنتیجه A و B' مستقل از یکدیگر هستند. او همچنین پیشامدهای A و B، A' و B' ، A' و B نیز مستقل از یکدیگرند.)

اگر $P(B) = x$ باشد، در این‌صورت: $P(A) = ۱/۶x$

$$\Rightarrow P(A' \cap B') = P(A')P(B') = ۰/۲۵$$
$$\Rightarrow (۱-۱/۶x)(۱-x) = ۰/۲۵$$
$$\Rightarrow ۱/۶x^۲ - ۲/۶x + \frac{۳}{۴} = ۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۵}{۴} \times \\ x = \frac{۳}{۸} = P(B) \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۵} \end{cases}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B') - P(A \cap B')$$
$$= P(A) + P(B') - P(A)P(B')$$
$$= \frac{۳}{۵} + \frac{۵}{۸} - (\frac{۳}{۵} \times \frac{۵}{۸})$$
$$= \frac{۲۴+۲۵-۱۵}{۴۰} = \frac{۳۴}{۴۰} = \frac{۱۷}{۲۰}$$

۵ ④ [۲۰و۲۳] ••○

میانگین چهار عدد برابر ۳ است، در نتیجه:

$$\frac{a+b+c+d}{۴} = ۳ \Rightarrow a+b+c+d = ۱۲$$

و واریانس چهار عدد برابر ۱/۵ است، بنابراین:

$$\sigma^۲ = \frac{a^۲+b^۲+c^۲+d^۲}{۴} - ۳^۲ = ۱/۵ \Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲+d^۲ = ۴۲$$

برای محاسبهٔ واریانس داده‌های a, b, c, d, ۵ ابتدا میانگین را محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$\bar{x} = \frac{a+b+c+d+۵}{۵} = \frac{۱۲+۵}{۵} = \frac{۱۷}{۵}$$

و در نتیجه:

$$\sigma^۲ = \frac{a^۲+b^۲+c^۲+d^۲+۲۵}{۵} - (\frac{۱۷}{۵})^۲$$
$$= \frac{۴۲+۲۵}{۵} - \frac{۲۸۹}{۲۵} = \frac{۴۶}{۲۵} = ۱/۸۴$$

۶ ③ [۱۱] ••○

فضای نمونهٔ این آزمایش شامل $۶ \times ۲^۳ = ۴۸$ عضو است. تعداد دفعاتی که سکه رو می‌آید، صفر یا ۱ یا ۲ یا ۳ است، که بنا به صورت تست، تنها حالت مورد نظر این است که سکه ۳ بار رو بیاید و تاس عدد ۱ بیاید، که احتمال آن برابر $\frac{۱}{۴۸}$ می‌باشد.

۷ ② [۱۷] ••○

اگر قبولی نیلوفر را A و قبولی دوستش را B در نظر بگیریم، در این‌صورت داریم:

$$P(A) = \frac{۲}{۳}P(B)$$

و از طرفی این پیشامدها مستقل از یکدیگرند، یعنی:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$P(B-A) = \frac{۳}{۸} \Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۸}$$
$$\Rightarrow P(B) - (\frac{۲}{۳}P(B))P(B) = \frac{۳}{۸}$$
$$\Rightarrow \frac{۲}{۳}P(B)^۲ - P(B) + \frac{۳}{۸} = ۰ \Rightarrow P(B)^۲ - \frac{۳}{۲}P(B) + \frac{۹}{۱۶} = ۰$$
$$\Rightarrow (P(B) - \frac{۳}{۴})^۲ = ۰ \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۴} \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

و در نتیجه احتمال اینکه هیچ‌کدام قبول نشوند برابر است با:

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B') = (۱-\frac{۳}{۴})(۱-\frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

کنکور داخل ۱۴۰۴ (نوبت دوم)

۱ ③ [۸] ••○

$$(A' \cap B) \cup [((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)]$$
$$= (B-A) \cup [((B \cap A) \cap B) \cap (B \cup A)]$$
$$= (B-A) \cup [(A \cap B) \cap (A \cup B)]$$
$$= (B-A) \cup (A \cap B) = B$$

kgoo.ir

۲ (۱) [۳] ●○○

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \sim (p \wedge q) \vee r \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$$
$$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \equiv \sim p \vee (q \Rightarrow r)$$
$$\equiv p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$
$$\equiv p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q) \quad \text{(عکس نقیض)}$$

۳ (۲) [۲۳] ●○○

چون با اضافه کردن دو داده، میانگین تغییری نکرده است، در نتیجه میانگین دو دادهٔ اضافه‌شده با میانگین داده‌ها برابر است، یعنی:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

واریانس ۱۶ داده برابر ۴۰ شده است، در نتیجه:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2}{16} = 40 \Rightarrow \sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2 = 40 \times 16$$

از طرفی واریانس ۱۸ دادهٔ جدید برابر ۴۱ شده، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2 + (a - \frac{a+b}{2})^2 + (b - \frac{a+b}{2})^2}{18} = 41$$

$$\Rightarrow 40 \times 16 + (\frac{a-b}{2})^2 + (\frac{b-a}{2})^2 = 18 \times 41$$

$$\Rightarrow 640 + 2(\frac{a-b}{2})^2 = 738$$

$$\Rightarrow (\frac{a-b}{2})^2 = \frac{738 - 640}{2} = 49$$

$$\Rightarrow \frac{|a-b|}{2} = 7 \Rightarrow |a-b| = 14$$

۴ (۳) [۱۳] ●○○

اگر A پیشامد این باشد که دومی از اولی کوتاه‌قدتر است و B پیشامد این باشد که اولی بلندقدترین عضو باشد، در این صورت با استفاده از احتمال شرطی داریم:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5} = 0/2$$

۵ (۱) [۱] ●○○

اگر یکی از کارت‌ها ۱ بیاید دو کارت دیگر هر یک از اعداد ۲ تا ۸ می‌توانند باشند و همچنین اگر یکی از کارت‌ها ۲ بیاید دو کارت می‌توانند ۴ یا ۶ یا ۸ باشند، در نتیجه داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{1}{1}\binom{7}{2} + \binom{1}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{21+3}{56} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$$

۶ (۴) [۱۱] ●○○

اگر A پیشامد خارج شدن حداقل یک مهرهٔ سیاه از ظرف باشد و تعداد مهره‌های سبز برابر x فرض شود، در این صورت داریم:

$$P(A) = 1 - P(A') \Rightarrow \frac{5}{6} = 1 - \frac{\binom{x}{2}}{\binom{x+5}{2}} \Rightarrow \frac{\frac{x(x-1)}{2}}{\frac{(x+5)(x+4)}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 6x = x^2 + 9x + 20$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 15x - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 4$$

و در نتیجه اختلاف تعداد مهره‌ها برابر است با: $5 - 4 = 1$

۷ (۴) [۲۴] ●○○

ابتدا میانگین داده‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{1/16 + 1/16 + 1/2 + 1/08 + 1}{5} = \frac{5/6}{5} = 1/12$$

و در نتیجه انحراف معیار برابر است با:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(0/04)^2 + (0/04)^2 + (0/08)^2 + (-0/04)^2 + (-0/12)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{0/0256}{5}} = \frac{0/16}{\sqrt{5}}$$

و ضریب تغییرات به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{0/16}{\sqrt{5}}}{1/12} = \frac{1}{7\sqrt{5}}$$

یادداشت

kgoo.ir