



با توجه به اینکه فصل اول کتاب درسی، کامل‌کننده درس تابع از سال‌های گذشته است، لازم است که مختصری پیش‌زمینه از سال‌های قبل داشته باشید تا روند یادگیری در این فصل سریع‌تر انجام شود.

ما سعی کرده‌ایم که درس‌نامه این فصل را با بیان ساده و مثال‌ها و تمرینات متنوع ارائه کنیم به طوری که با مطالعه دقیق درس‌نامه و حل تمرینات نیازی به مراجعه به کتاب دیگری نداشته باشید.

همه تمرینات و کار در کلاس‌ها و فعالیت‌های مهم کتاب درسی مورد توجه و بررسی قرار گرفته است. بنابراین توصیه می‌کنیم، حتماً مثال‌ها و تمرینات را یک یا چند بار حل کنید تا به موضوعات مورد اشاره تسلط کافی پیدا کنید.

در آخر، پس از پایان فصل به مثال‌های کتاب درسی و تمرینات مهم آن که در زیر به آنها اشاره شده است، توجه بیشتری داشته باشید.

- کار در کلاس صفحه ۵
- کار در کلاس صفحه ۹
- تمرین‌های ۱، ۲، ۴ و ۵ صفحه ۱۰
- کار در کلاس صفحه ۱۴
- تمرین‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ صفحه ۲۲
- تمرین‌های ۸، ۹ و ۱۲ صفحه ۲۳
- مثال صفحه ۲۷
- کار در کلاس صفحه ۲۷
- تمرین‌های ۱، ۲، ۴، ۶ و ۷ صفحه ۲۹
- مثال صفحه ۲۸ - بسیار مهم

مفاهیم کلیدی



آزمون تشخیصی مفاهیم کلیدی

۹۰+ نمودار تابع $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ را رسم کنید. بلدیوم بلدنیوم

۹۱+ با رسم نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^3 + 2$ در بازه $[-1, 3]$ ، برد f را به دست آورید.

۹۲.۱+ تابع $f(x) = \begin{cases} 2^{x+1} & x < 0 \\ -x^3 + 1 & x \geq 0 \end{cases}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

۹۲.۲+ چه تعداد از توابع زیر اکیداً یکنوا هستند؟

الف) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$

ب) $g(x) = 3x - 2^{-x}$

ج) $h(x) = x^3 - x$

۹۳.۱+ اگر $g(x) = 2x - 3$ و $f \circ g(x) = 4x^2 - 14x + 13$ باشند، ضابطه $f(x)$ را بنویسید.

۹۳.۲+ اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ باشند، دامنه تابع $g \circ f$ شامل چند عدد صحیح است؟

۹۴+ تابع $y = \sqrt{x}$ را با ضریب $\frac{1}{4}$ در راستای افقی منقبض می‌کنیم، سپس یک واحد به راست انتقال می‌دهیم، سپس با ضریب ۳ در راستای عمودی منبسط می‌کنیم و در آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه جدید را بنویسید.

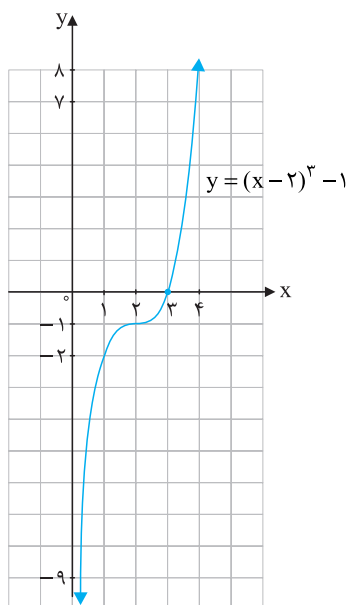
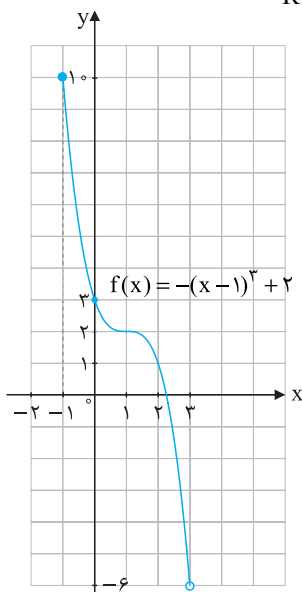
۹۵ اگر $f(x) = x^2 + 3x - 3$ با دامنه $x > \frac{-3}{2}$ مفروض باشد، نمودارهای f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟

۹۶ تابع $f(x) = x^2 + 4x + 1$ در بازه‌ای نزولی اکید است. تابع وارون f را در این بازه بنویسید.

پاسخ

.....[۹۰]

$$R_f = (-6, 10]$$



۹۲.۱تابع در دامنه‌اش یکنوا نیست.

در بازه $(-\infty, 0)$ صعودی اکید است.

در بازه $[0, +\infty)$ نزولی اکید است.

$$f(x) = x^2 - x + 1 \quad \text{.....[۹۳.۱]}$$

$$y = -3\sqrt{2x-2} \quad \text{.....[۹۴]}$$

$$f^{-1}(x) = -2 - \sqrt{x+3} \quad \text{.....[۹۶]}$$

۹۳.۱دامنه تابع $g \circ f$ شامل ۱۰ عدد صحیح است.

۹۵نمودارهای f و f^{-1} فقط در یک نقطه متقاطع هستند.

● درس اول: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی



زمان شما:

[حداکثر زمان مطالعه: ۱۵۰ دقیقه]

مفاهیم آموزشی

+ ۹۰ تابع چندجمله‌ای - تابع درجه ۳

همان طور که در سال‌های گذشته مشاهده کردید، صورت کلی یک تابع چندجمله‌ای از درجه n به صورت زیر است:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{W}$$

دامنه و برد این تابع، مجموعه اعداد حقیقی است. بالاترین درجه x ، همان **درجه چندجمله‌ای** نامیده می‌شود. برای مثال:

$$f(x) = 2x^3 + 5x - 2 \quad (\text{درجه سه}) \quad f(x) = 6x^5 + x^4 - 2x^3 + x \quad (\text{درجه پنج}) \quad f(x) = -2x^6 + \sqrt{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 5 \quad (\text{درجه شش})$$

توجه کنید مهم‌ترین توابع چندجمله‌ای که در کتاب درسی مورد بررسی قرار می‌گیرند، عبارت‌اند از:

$$f(x) = k \quad (\text{تابع ثابت (درجه صفر)})$$

$$f(x) = ax + b \quad (\text{تابع خطی (درجه یک)})$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{تابع درجه دوم})$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (\text{تابع درجه سوم})$$

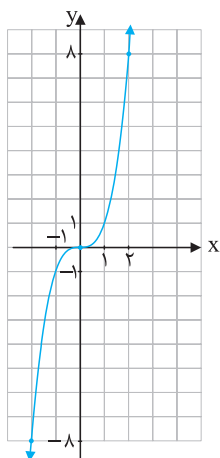
در مورد تابع درجه سوم فقط فرم $y = a(x+b)^3 + d$ ، مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ بنابراین لازم است اتحادهای زیر را خوب بشناسیم تا بتوانیم ضابطه تابع را به فرم مورد نظر تبدیل کنیم:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$



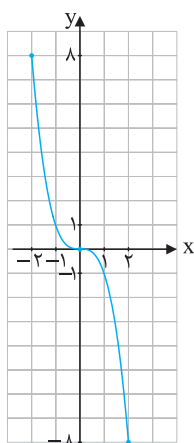
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$f(x) = x^3$	-۸	-۱	۰	۱	۸

نمودار تابع $y = x^3$ را به کمک نقطه یابی رسم می کنیم.
 در این تابع، نقطه $(0,0)$ مرکز تقارن تابع است.
 دامنه و برد این تابع، مجموعه اعداد حقیقی است.

به نمودار تابع $y = x^3$ نمودار «لَم» و یا «لُر» هم میگویند.

نکته برای رسم نمودار تمام توابع درجه سوم در این کتاب، می توانیم با انتقال مرکز تقارن تابع $f(x) = x^3$ یعنی نقطه $(0,0)$ ، به راحتی نمودار تابع را رسم کنیم.

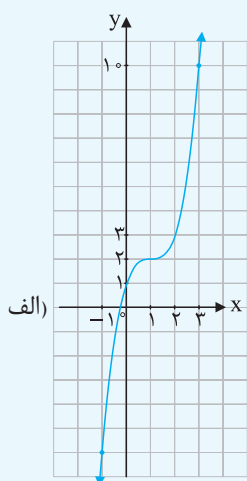
توجه کنید که نمودار تابع $y = -x^3$ به صورت مقابل است.



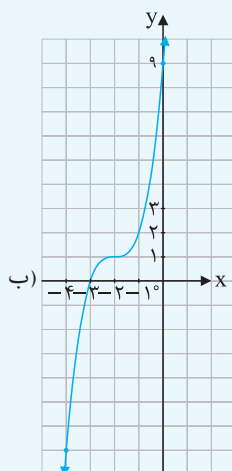
سوال نمودار توابع زیر را رسم کنید.

- الف) $y = (x-1)^3 + 2$ ب) $y = (x+2)^3 + 1$ ج) $y = -(x-2)^3 - 3$ د) $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 7$

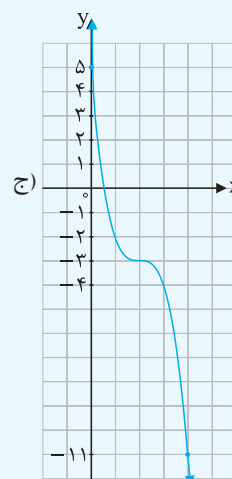
پاسخ



(۱,۲) مرکز تقارن



(-۲,۱) مرکز تقارن

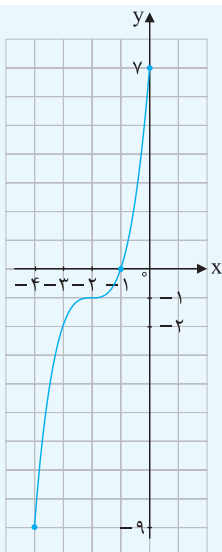


(۲,-۳) مرکز تقارن

د) برای رسم نمودار این تابع باید ضابطه تابع را به کمک اتحادهای مکعب کامل مرتب کنیم:

$$y = x^3 + 6x^2 + 12x + 7 \Rightarrow y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - 1$$

$$\Rightarrow y = (x + 2)^3 - 1 \Rightarrow \text{مرکز تقارن } (-2, -1)$$



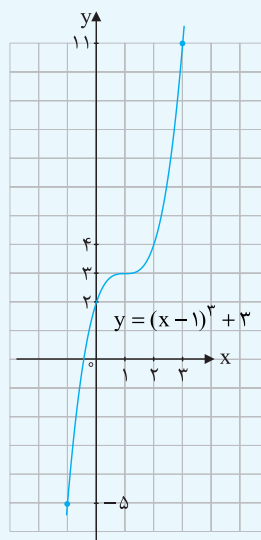
سوال نمودار تابع $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

پاسخ برای تشخیص ناحیه مورد نظر باید نمودار تابع را رسم کنیم.

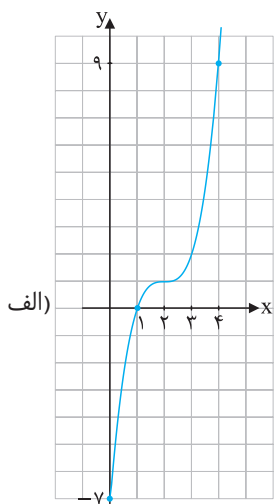
$$y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3$$

$$\Rightarrow y = (x - 1)^3 + 3 \Rightarrow \text{مرکز تقارن } (1, 3)$$

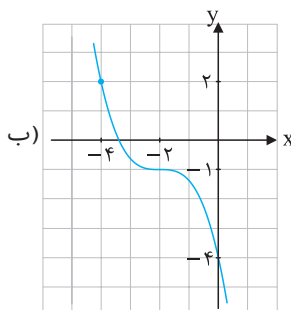
نمودار تابع از ناحیه چهارم نمی‌گذرد.



سوال برای هر یک از شکل‌های زیر یک ضابطه بنویسید.



الف)



ب)

پاسخ: الف) نقطه $(2, 1)$ مرکز تقارن نمودار است، پس ضابطه آن باید به صورت $y = a(x - 2)^3 + 1$ باشد. از طرفی نقطه $(1, 0)$ روی نمودار تابع قرار دارد، پس:

$$0 = a(-1)^3 + 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow y = (x - 2)^3 + 1$$

ب) نقطه $(-2, -1)$ مرکز تقارن نمودار است، پس ضابطه آن باید به صورت $y = a(x + 2)^3 - 1$ باشد. از طرفی نقطه $(-4, 0)$ روی نمودار تابع قرار دارد، پس:

$$-4 = a(2)^3 - 1 \Rightarrow a = \frac{-3}{8} \Rightarrow y = \frac{-3}{8}(x + 2)^3 - 1$$

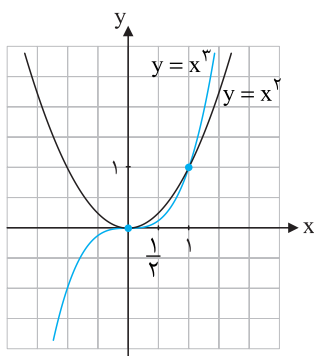
● مقایسه نمودارهای $y = x^3$ و $y = x^2$

نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = x^3$ را با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم، همان‌طور که مشاهده می‌کنید:

در بازه $0 < x < 1$ ، نمودار x^2 بالاتر از x^3 قرار دارد.

در بازه $1 < x$ ، نمودار x^3 بالاتر از x^2 قرار دارد.

در بازه $x < 0$ ، نمودار x^2 بالاتر از x^3 قرار دارد.



نکات: ۱- تابع $y = x^n$ با توجه به مقادیر طبیعی، $n \neq 1$ می‌تواند یک سهمی یا یک لم باشد.

$$\text{لم} \quad n = 2k + 1 \geq 3 \Rightarrow y = x^{2k+1}$$

$$\text{سهمی} \quad n = 2k \Rightarrow y = x^{2k}$$

همه توابع $y = x^2$ ، $y = x^4$ ، $y = x^6$ ، ... سهمی هستند.

همه توابع $y = x^3$ ، $y = x^5$ ، $y = x^7$ ، ... لم هستند.

۲- اگر نمودار این توابع را در ناحیه اول دستگاه مختصات بررسی کنیم، خواهیم داشت:

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^2 > x^3 > x^4 > \dots$$

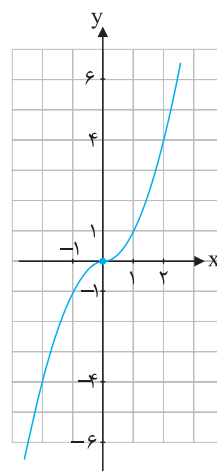
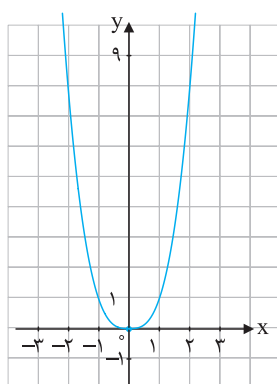
$$x > 1 \Rightarrow x^2 < x^3 < x^4 < \dots$$

نکته: دو تابع بسیار مهم که باید نمودارهای آنها را بشناسیم، عبارت‌اند از: $y = x^2 |x|$ و $y = x |x|$

ابتدا ضابطه دو تابع را بدون قدر مطلق بازنویسی می‌کنیم:

$$y = x^2 |x| = \begin{cases} -x^3 & x < 0 \\ +x^3 & x \geq 0 \end{cases}$$

$$y = x |x| = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ +x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$



بنابراین نمودار تابع $y = x |x|$ مانند $y = x^3$ ، یک لم است و نمودار تابع $y = x^2 |x|$ مانند $y = x^4$ ، یک سهمی است.

۹۱ تعیین برد تابع

● بُرد توابع:

برای یافتن برد یک تابع می‌توانیم از دستورات زیر استفاده کنیم.

۱- بُرد هر تابع چند جمله‌ای با درجه فرد، برابر $\mathbb{R}$ است.

$$y = 3x + 5 : R_f = \mathbb{R}$$

$$y = 6x^3 + x^2 - 4x + 1 : R_f = \mathbb{R}$$

۲- بُرد یک تابع درجه دوم عبارت است از:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$S \text{ رأس سهمی } \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} \\ y = \frac{-\Delta}{4a} = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 : R_f = [k, +\infty) \\ a < 0 : R_f = (-\infty, k] \end{cases}$$

سوال برد توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = x^2 - 6x + 4$

ب) $g(x) = -x^2 + 4x + 7$

پاسخ

الف) $S \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = 3 \\ k = f(3) = -5 \end{cases} \quad a > 0 : R_f = [-5, +\infty)$

ب) $S \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = 2 \\ k = f(2) = 11 \end{cases} \quad a < 0 : R_f = (-\infty, 11]$

۳- برد تابع $y = \sqrt{ax + b}$ همواره برابر $R_f = [0, +\infty)$ است.

سوال برد توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \sqrt{-3x + 2}$

ب) $g(x) = 2 + \sqrt{5x - 1}$

ج) $h(x) = 3 - \sqrt{4 - x}$

پاسخ

الف) $R_f = [0, +\infty)$

ب) $\sqrt{5x + 1} \geq 0 \Rightarrow 2 + \sqrt{5x + 1} \geq 2 \Rightarrow y \geq 2, R_g = [2, +\infty)$

ج) $\sqrt{4 - x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{4 - x} \leq 0 \Rightarrow 3 - \sqrt{4 - x} \leq 3 \Rightarrow y \leq 3, R_h = (-\infty, 3]$

۴- در حالت کلی برای یافتن برد تابع $f(x) = \sqrt{g(x)}$ ، ابتدا برد تابع g را پیدا کرده و سپس قسمت‌های منفی برد g را حذف و از قسمت مثبت آن جذر می‌گیریم تا برد تابع f به دست آید.

سوال برد تابع $f(x) = \sqrt{7 + 2x - x^2}$ را بیابید.

پاسخ ابتدا برد عبارت زیر رادیکال را پیدا می‌کنیم.

$g(x) = -x^2 + 2x + 7$

$S \begin{cases} x = \frac{-b}{2a} = 1 \\ k = f(1) = 8 \end{cases} \quad R_g = (-\infty, 8] : R_f = [0, \sqrt{8}]$

سوال کمترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 + 5$ را بیابید.

پاسخ ابتدای مجموعه جواب بُرد تابع، کمترین مقدار تابع است.

$R_f = [5, +\infty) \rightarrow f = 5$ کمترین مقدار

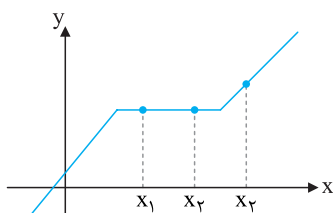
+ ۹۲ یکنوایی توابع

در این بخش می‌خواهیم مفاهیم صعودی و نزولی بودن تابع را با استفاده از نمودار تابع مورد بررسی قرار دهیم.

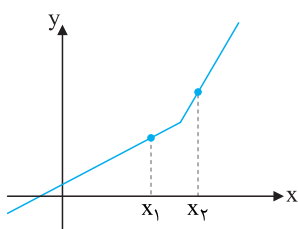
تابع $y = f(x)$ دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه $A \subseteq D_f$ را در نظر می‌گیریم.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع صعودی: تابع f را صعودی می‌نامیم هرگاه:



در نمودار این توابع وقتی از چپ به راست روی نمودار حرکت می‌کنیم، مقدار y ها کم نمی‌شود.



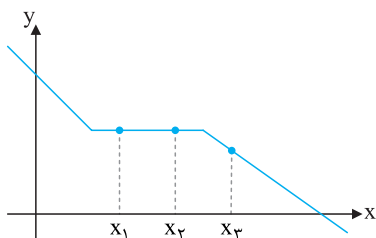
تابع اکیداً صعودی: تابع f را اکیداً صعودی می‌نامیم هرگاه:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

در نمودار این توابع وقتی از چپ به راست روی نمودار حرکت می‌کنیم، مقدار y ها زیاد می‌شود.

تابع نزولی: تابع f را نزولی می‌نامیم هرگاه:

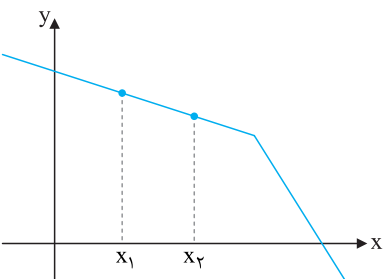
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



در نمودار این توابع وقتی از چپ به راست روی نمودار حرکت می‌کنیم، مقدار y ها زیاد نمی‌شود.

تابع اکیداً نزولی: تابع f را اکیداً نزولی می‌نامیم هرگاه:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



در نمودار این توابع وقتی از چپ به راست روی نمودار حرکت می‌کنیم، مقدار y ها کم می‌شود.

تابع یکنوا: تابعی که صعودی و یا نزولی باشد را یکنوا می‌نامیم.

تابع اکیداً یکنوا: تابعی که اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد را اکیداً یکنوا می‌نامیم.

نکته اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، آنگاه یکنوا نیز هست. (عکس این مطلب صحیح نیست.)

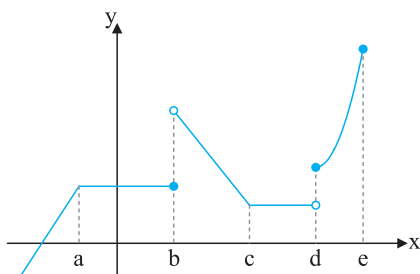
مثلاً برای تابعی مانند $y = x^2$ مقادیر تابع روی $\mathbb{R}$ هم افزایش می‌یابند و هم کاهش می‌یابند، پس $y = x^2$ روی $\mathbb{R}$ نه صعودی نه نزولی است. (یکنوا نیست.)

نکته تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است، بنابراین یکنوا نیز هست.

در تابع ثابت y ها کم نمی‌شوند، پس صعودی است. در تابع ثابت y ها زیاد نمی‌شوند، پس نزولی است.

اکنون که با تعاریف توابع صعودی و نزولی آشنا شدید، برای درک بهتر به مثال‌های زیر توجه کنید.

سوال با توجه به نمودار تابع f ، تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌هایی صعودی، نزولی، صعودی اکید و یا نزولی اکید است.



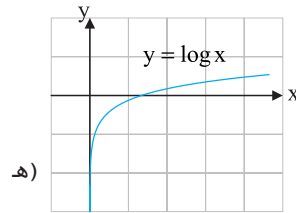
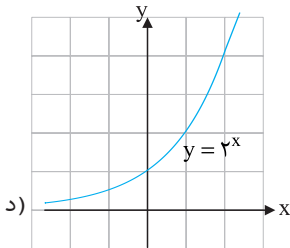
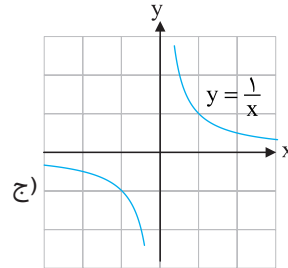
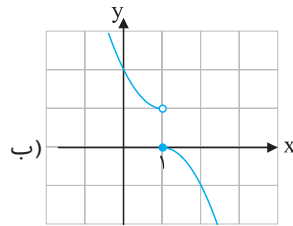
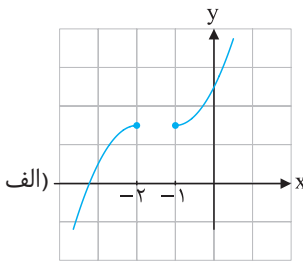
بازه	یکنوایی

پاسخ

بازه	یکنوایی
$(-\infty, b], [c, e]$	صعودی (یکنوا)
$(-\infty, a], [d, e]$	اکیداً صعودی (اکیداً یکنوا)
$[a, b], (b, d)$	نزولی (یکنوا)
$(b, c]$	اکیداً نزولی (اکیداً یکنوا)
$[a, b], [c, d]$	هم صعودی و هم نزولی (یکنوا)

توجه کنید این تابع در بازه $(-\infty, e]$ یکنوا نیست.

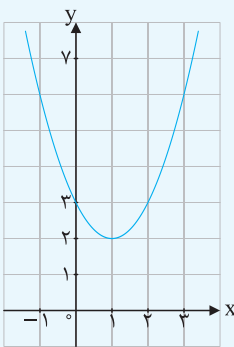
سوال هر یک از توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی (اکیداً صعودی) و در چه بازه‌هایی نزولی (اکیداً نزولی) هستند؟



پاسخ الف) تابع در بازه‌های $(-\infty, -2]$ و $[-1, +\infty)$ اکیداً صعودی است. این تابع در دامنه‌اش صعودی است.
 ب) تابع در $\mathbb{R}$ (بازه $(-\infty, +\infty)$) اکیداً نزولی است.
 ج) تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است. در $\mathbb{R} - \{0\}$ تابع یکنوا نیست.
 د) تابع در $\mathbb{R}$ (بازه $(-\infty, +\infty)$) اکیداً صعودی است.
 ه) تابع در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

سوال تابع $f(x) = x^2 - 2x + 3$ از نظر یکنوایی چه وضعی دارد؟

پاسخ ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



$$y = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x - 1)^2 + 2$$

با توجه به نمودار، مقادیر y از چپ به راست ابتدا کم و سپس زیاد می‌شوند، بنابراین تابع روی $\mathbb{R}$ یکنوا نیست.

تابع قبل از رأس سهمی، یعنی در بازه $(-\infty, 1]$ اکیداً نزولی است.
 تابع از رأس سهمی به بعد یعنی در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی است.

نکات ۱- تابع درجه دوم (سهمی) روی $\mathbb{R}$ یکنوا نیست اما در بازه‌های قبل و بعد از رأس سهمی، اکیداً یکنوا است.
 ۲- تابع درجه دوم در هر بازه‌ای که رأس سهمی درون آن بازه قرار داشته باشد (به جز نقاط ابتدا و انتهای بازه)، یکنوا نیست.

سوال آیا تابع $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ در بازه $(1, +\infty)$ یکنوا است؟

پاسخ

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{5}{4} \in (1, +\infty)$$

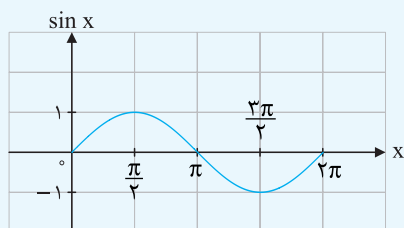
چون رأس سهمی درون بازه قرار دارد، پس تابع در این بازه یکنوا نیست.

سوال حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $f(x) = 2x^2 - (a+1)x - 3$ در بازه $(2, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد.

پاسخ اگر تابع درجه دوم در بازه $(2, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، در این صورت رأس سهمی، درون این بازه قرار ندارد.

$$x = \frac{a+1}{4} \Rightarrow \frac{a+1}{4} \notin (2, +\infty) \Rightarrow \frac{a+1}{4} \leq 2 \Rightarrow a+1 \leq 8 \Rightarrow a \leq 7$$

سوال وضعیت یکنوایی تابع $y = \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.



پاسخ تابع در این بازه یکنوا نیست.

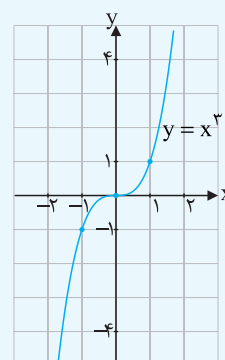
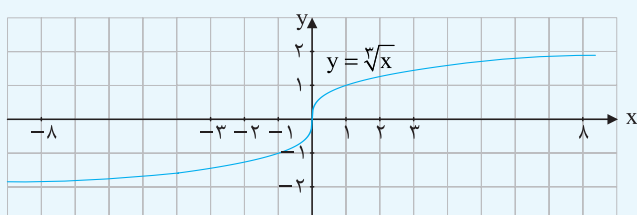
در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی است.

در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است.

در بازه $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ اکیداً صعودی است.

سوال با رسم نمودار توابع $y = \sqrt[3]{x}$ و $y = x^3$ یکنوایی آنها را بررسی کنید.

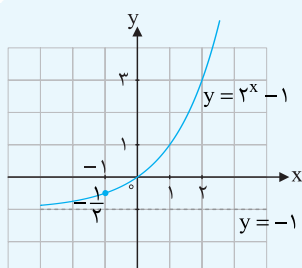
پاسخ



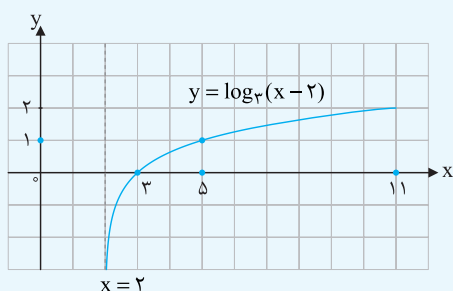
هر دو تابع روی $\mathbb{R}$ صعودی اکید هستند. توجه کنید این دو تابع وارون یکدیگر هستند.

سوال با رسم نمودار توابع $y = 2^x - 1$ و $y = \log_2(x - 2)$ یکنوایی آنها را بررسی کنید.

پاسخ تابع $y = 2^x - 1$ روی $\mathbb{R}$ صعودی اکید است.



تابع $y = \log_2(x - 2)$ در بازه $(2, +\infty)$ صعودی اکید است.



نکات ۱- اگر تابع f صعودی اکید باشد، آنگاه تابع $(-f)$ نزولی اکید است.

۲- اگر تابع f نزولی اکید باشد، آنگاه تابع $(-f)$ صعودی اکید است.

۳- اگر تابع $f > 0$ صعودی اکید باشد، آنگاه تابع $\frac{1}{f}$ نزولی اکید است.

۴- اگر تابع $f > 0$ نزولی اکید باشد، آنگاه تابع $\frac{1}{f}$ صعودی اکید است.

۵- اگر توابع f و g هر دو صعودی اکید باشند، آنگاه $f + g$ نیز صعودی اکید است.

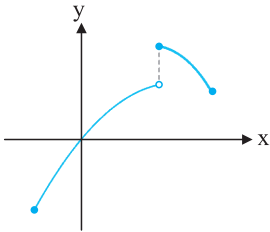
۶- اگر توابع f و g هر دو نزولی اکید باشند، آنگاه $f + g$ نیز نزولی اکید است.

سوال تابع $y = 2 + \frac{-1}{x+1}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

پاسخ اگر $f(x) = 2^{x+1}$ باشد، آنگاه f صعودی اکید است. ($f > 0$)، بنابراین $\frac{1}{f}$ نزولی اکید و در آخر $\frac{-1}{f}$ صعودی اکید خواهد بود. انتقال عمودی نیز تأثیری در یکنوایی ندارد. بنابراین تابع y اکیداً صعودی است.

سوال یکنوایی تابع $y = x + \sqrt{x}$ را بررسی کنید.

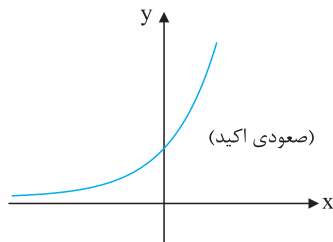
پاسخ تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = x$ هر دو صعودی اکید هستند، بنابراین مجموع آنها نیز صعودی اکید خواهد بود.



نکات ۱- اگر تابعی اکیداً یکنوا باشد، حتماً یک به یک نیز هست. اما اگر تابعی یک به یک باشد، نمی توان گفت اکیداً یکنوا است. در شکل مقابل، تابع یک به یک است اما اکیداً یکنوا نیست.

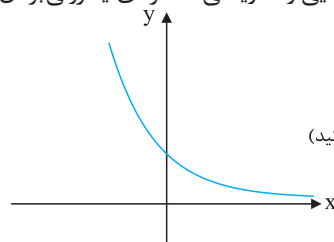
۲- در توابع نمایی و لگاریتمی، صعودی یا نزولی بودن تابع به مقدار پایه (مبنای) وابسته است.

$$y = a^x (a > 1)$$



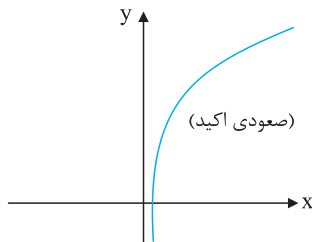
(صعودی اکید)

$$y = a^x (0 < a < 1)$$



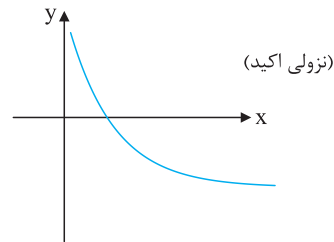
(نزولی اکید)

$$y = \log_a x (a > 1)$$



(صعودی اکید)

$$y = \log_a x (0 < a < 1)$$



(نزولی اکید)

سوال اگر تابع $y = \left(\frac{2m}{m-1}\right)^x$ نزولی اکید باشد، حدود m چیست؟

$$0 < \frac{2m}{m-1} < 1$$

پاسخ چون تابع نمایی نزولی اکید است، پس باید پایه آن مقداری بین صفر و یک باشد.

$$0 < \frac{2m}{m-1} \Rightarrow \frac{m}{\frac{2m}{m-1}} + \frac{1}{\frac{2m}{m-1}} - \frac{1}{\frac{2m}{m-1}} \Rightarrow m < 0 \text{ یا } m > 1 \quad (1)$$

$$\frac{2m}{m-1} < 1 \Rightarrow \frac{2m}{m-1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{m+1}{m-1} < 0 \Rightarrow \frac{m}{\frac{m+1}{m-1}} + \frac{-1}{\frac{m+1}{m-1}} - \frac{1}{\frac{m+1}{m-1}} \Rightarrow -1 < m < 0 \quad (2)$$

با اشتراک گرفتن جواب (۱) و (۲) نتیجه می شود: $-1 < m < 0$

نکته اگر f صعودی اکید باشد آنگاه: $f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$

اگر f نزولی اکید باشد آنگاه: $f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \geq b$

سوال اگر $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $f(2x-1) \leq f(x+5)$ باشد، حدود x را بیابید.

$$f(2x-1) \leq f(x+5) \Rightarrow 2x-1 \geq x+5 \Rightarrow x \geq 6$$

پاسخ

تمرین‌های امتحانی

نادرست

درست

مفاهیم کلیدی

☐☐☐☐☐☐

[کرج - استعدادهای درخشان شهید سلطانی ۳ - دی ۱۴۰۰]

الف) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱. اگر تابعی اکیداً نزولی باشد، آن را نزولی نیز می‌نامیم.

۲. تابع $y = \sqrt[3]{x} + 2$ در دامنه‌اش اکیداً صعودی است.۳. تابع $f(x) = x - |x|$ در مجموعه اعداد حقیقی نزولی است.

ب) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۴. تابعی که در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود، تابع نامیده می‌شود.

۵. تابع $y = x^2 |x|$ در بازه $(-\infty, a]$ نزولی است، حداکثر مقدار a است.

[تهران - نمونه‌دولتی زهرا نظام مافی - دی ۱۴۰۰]

[تهایی - دی ۱۴۰۰ / ۲ بار تکرار]

* ۶. نمودار تابع $f(x) = x^3$ در بازه $(0, 1)$ از نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار دارد. (بالتر - پایین‌تر)۷. تابع f با ضابطه $f(x) = x - [x]$ دارای برد است.

[بهبهان - استعدادهای درخشان خرازنگان - دی ۱۴۰۰]

ج) گزینه درست را با علامت ✓ مشخص کنید.

۸. تابع $f(x) = |x - 2| - |x + 1|$ در کدام بازه نزولی اکید است؟[۴] $[-1, 2]$ [۳] $(2, +\infty)$ [۲] $(-\infty, 2)$ [۱] $(-\infty, -1)$

[اراک - مدرسه شاهد زینب کبری (س) - دی ۱۴۰۰]

۹. تابع نمایی $f(x) = (3k + 1)^x$ اکیداً صعودی است. حدود k چقدر است؟[۴] $K > 0$ [۳] $-\frac{1}{3} < K < \frac{1}{3}$ [۲] $-\frac{1}{3} < K < 0$ [۱] $0 < k < \frac{1}{3}$

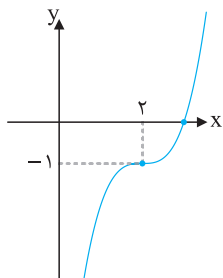
د) به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱۰. تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & x < 2 \\ 2x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$ از نظر یکنوایی چگونه است؟

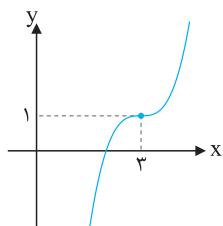
[ایلام - نمونه‌دولتی فضیلت - دی ۱۴۰۰]

۱۱. نمودار تابع $f(x) = (x - 1)^3 + 2$ را رسم کنید. دامنه، برد و یکنوایی آن را مشخص کنید.

[تهران - نمونه‌دولتی صدر - دی ۱۴۰۰]

۱۲. اگر نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد، مقادیر a ، b و c را بیابید.

[تهران - نمونه‌دولتی فراست - دی ۹۹]

۱۳. حدود a را طوری تعیین کنید تا تابع $y = (\frac{2-a}{a+1})^{x-1}$ اکیداً صعودی باشد.۱۴. اگر تابع $f = \{(-1, m - 3), (1, m^2 - 2m - 1), (3, 7)\}$ یک تابع اکیداً صعودی باشد، حدود m چیست؟ [تهران - مدرسه شهید بهشتی - دی ۱۴۰۰]۱۵. حدود a را طوری تعیین کنید تا تابع درجه دوم $f(x) = (a + 1)x^2 - 3ax$ در بازه $(-\infty, 2)$ اکیداً صعودی باشد. [تهران - نمونه‌دولتی صدر - دی ۱۴۰۰]۱۶. در بازه‌ای که تابع $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$ اکیداً نزولی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - x - 10$ در چند نقطه مشترک هستند؟۱۷. اگر نمودار تابع $f(x) = (x - m)^3 + h$ به شکل زیر باشد، تابع $g(x) = -(x - h)^3 + m$ از کدام ناحیهدستگاه مختصات عبور نمی‌کند؟ (تابع $g(x)$ را رسم کنید.) [تهران - نمونه‌دولتی زهرا نظام مافی - دی ۱۴۰۰]

سؤال تمرین	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
کدمفاهیم کلیدی	۹۲	۹۲	۹۲	۹۲	۹۲	۹۰	۹۱	۹۲	۹۲	۹۲	۹۰	۹۱	۹۰	۹۲	۹۲	۹۲	۹۰