



هندسه تحلیلی و جبر

فصل اول



در فصل اول مطالب متنوعی از هندسه تحلیلی، معادله درجه دو و حل معادلات گویا و رادیکالی می‌خوانید. برای مطالعه بهتر و تسلط بیشتر در مطالب این فصل، بهتر است مفاهیم معادله خط، رسم نمودار خطی و هم‌چنین رسم سهمی و اتحادها را مرور کنید و در مبحث تجزیه عبارت‌ها به اندازه کافی تسلط داشته باشید تا بتوانید مفاهیم این فصل را به خوبی درک کنید.

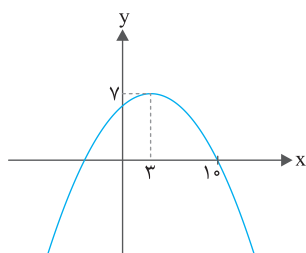
برای کسب نمره بهتر توصیه می‌کنم تمرین‌ها و مثال‌های درسنامه را چندبار خودتان حل کنید تا به روش‌های مختلف مسلط شوید و تنوع سؤالات را بهتر درک کنید. همچنین سؤال‌های زیر از کتاب درسی را حتماً مطالعه کنید: کاردکلاس صفحه ۱۳ سؤال ۳، کاردکلاس صفحه ۴، کاردکلاس صفحه ۶ سؤال‌های ۲ و ۳، کاردکلاس صفحه ۷ سؤال‌های ۱ و ۲، کاردکلاس و تمرین صفحه ۹، کاردکلاس صفحه ۱۳ سؤال ۳، کاردکلاس صفحه ۱۵ سؤال ۲، تمرین صفحه ۱۸، تمرین صفحه ۲۳ و ۲۴.

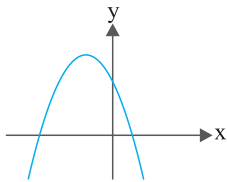
مفاهیم کلیدی



آزمون تشخیصی مفاهیم کلیدی

- ۳۸ معادله خطی را بنویسید که در نقطه‌ای به طول ۳ بر روی خط $y = 3x - 5$ عمود باشد.
- ۳۹ اگر دو نقطه $A(3, 5)$ و $B(-1, 1)$ دو سر قطر دایره باشند، فاصله مرکز دایره تا مبدأ مختصات چقدر است؟
- ۴۰ دایره‌ای با مرکز $O(1, 2)$ بر خط $y = -2x + 10$ مماس است، مساحت دایره را به دست آورید.
- ۴۱ حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$ چقدر است؟
- ۴۲ اگر ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 7 = 0$ برابر α و β باشد، حاصل $\alpha^2 + \beta^2$ را به دست آورید.
- ۴۳ معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن یک واحد بزرگ‌تر از ریشه‌های معادله $3x^2 - x - 5 = 0$ باشد.
- ۴۴ اگر محیط یک مستطیل ۱۴ باشد، ابعاد آن را طوری پیدا کنید که مساحتش حداکثر شود.
- ۴۵۱ معادله سهمی روبه‌رو را بنویسید.





۴۵.۲ اگر معادله سهمی روبه‌رو به فرم $y = ax^2 + bx + c$ باشد، علامت a و b و c را بیابید.

۴۶ معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{2}{x} - \frac{3x}{x+2} = \frac{x}{x^2+2x}$$

۴۷.۱ دو نقاش با هم دیوارهای یک مدرسه را در ۱۵ ساعت رنگ می‌کنند. اگر بدانیم سرعت یکی ۳ برابر دیگری است، هر کدام به تنهایی

در چند ساعت دیوارهای مدرسه را رنگ می‌کنند؟

۴۷.۲ جواب‌های معادله $x + \sqrt{x} - 6 = 0$ را به دست آورید.

پاسخ

$$OO' = \sqrt{10} \quad \dots [۳۹]$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 5 \quad \dots [۳۸]$$

$$S = \frac{36\pi}{5} \quad \dots [۴۰] \quad \text{مساحت دایره، } r = \frac{6}{\sqrt{5}} \text{ فاصله مرکز دایره تا خط، } 2x + y - 10 = 0 \text{ معادله خط}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{37}{4} \quad \dots [۴۲]$$

$$\dots [۴۱] \quad \text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = (2) \times (-2) = -4$$

$$x = \frac{7}{2} \text{ و } y = \frac{7}{2} \quad \dots [۴۴]$$

$$\dots [۴۳] \quad 3x^2 - 7x - 1 = 0 \text{ یا } x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$

$$c > 0, b < 0, a < 0 \quad \dots [۴۵.۲]$$

$$y = -\frac{1}{7}x^2 + \frac{6}{7}x + \frac{40}{7} \quad \dots [۴۵.۱]$$

$$\dots [۴۷.۱] \quad 60 = \text{زمان نقاش کندتر و } 20 = \text{زمان نقاش سریع‌تر}$$

$$x = \frac{4}{3}, x = -1 \quad \dots [۴۶]$$

$$\dots [۴۷.۲] \quad \text{معادله یک جواب دارد که آن هم } x = 4 \text{ است.}$$

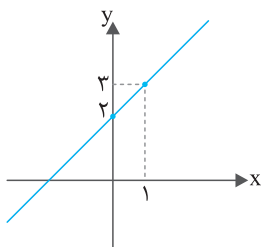
درس اول: هندسه تحلیلی



[حداکثر زمان مطالعه: ۱۸۰ دقیقه] زمان شما:

مفاهیم آموزشی

۳۸ وضعیت دو خط نسبت به هم



یادآوری در سال‌های گذشته با مفهوم خط و معادله آن آشنا شده‌اید. برای رسم یک خط در دستگاه

مختصات به دو نقطه آن نیاز داریم. به عنوان مثال برای رسم خط $y = x + 2$ کافی است یک بار x را مساوی صفر

و بار دیگر هم مساوی یک قرار دهیم.

حال به کمک دو نقطه $(0, 2)$ و $(1, 3)$ می‌توانیم این خط را مانند شکل روبه‌رو رسم کنیم:

اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ دو نقطه از یک خط باشند، می‌توانیم شیب خط را به کمک رابطه زیر به دست آوریم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

در این رابطه ترتیب نقاط A و B اهمیت ندارد، ولی اگر در صورت رابطه عرض یک نقطه را ابتدا نوشتیم باید در مخرج هم طول همان نقطه را ابتدا

بنویسیم. به عنوان مثال برای محاسبه شیب خط گذرا از دو نقطه $A(1, 2)$ و $B(3, -1)$ داریم:

$$m = \frac{2 - (-1)}{1 - 3} = \frac{3}{-2} = -1/2 \quad \text{یا} \quad m = \frac{-1 - 2}{3 - 1} = \frac{-3}{2} = -1/2$$

می‌دانیم شیب دو خط موازی با هم برابر است، پس شرط موازی بودن دو خط آن است که شیب برابر داشته باشند.

اگر معادله یک خط به صورت $y = ax + b$ باشد، مقدار a شیب خط و مقدار b عرض از مبدأ (یعنی جایی که خط محور y ها را قطع می‌کند)، را

نمایش می‌دهد.



برای نوشتن معادله یک خط به شیب خط و یک نقطه از آن نیاز داریم. پس از محاسبه شیب خط، مقدار شیب و مختصات یکی از نقاط داده شده را در رابطه $y = ax + b$ جایگذاری می‌کنیم و مقدار b را نیز می‌یابیم سپس معادله خط را می‌نویسیم. البته راه دومی هم وجود دارد، اگر خطی با شیب m از نقطه (x_0, y_0) عبور کند، معادله آن به صورت $y - y_0 = m(x - x_0)$ خواهد بود. بنابراین برای نوشتن معادله خط گذرا از دو نقطه $A(7, 0)$ و $B(1, 3)$ ، داریم:

$$m = \frac{0 - 3}{7 - 1} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{راه اول: } y = -\frac{1}{2}x + b \xrightarrow[\text{معادله خط صدق می‌کند.}]{\text{مختصات (1, 3) در}} 3 = -\frac{1}{2} \times 1 + b \Rightarrow b = \frac{7}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\text{راه دوم: } y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

معادله خط موازی با محور x ها به صورت $y = k$ است. ($k \in \mathbb{R}$)

معادله خط موازی با محور y ها به صورت $x = c$ است. ($c \in \mathbb{R}$)

برای بررسی وضعیت دو خط نسبت به هم کافی است شیب و عرض از مبدأ آن‌ها را داشته باشیم و با هم مقایسه کنیم:

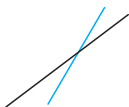
۱- اگر دو خط شیب برابر داشته باشند، با هم موازی هستند. (باید عرض از مبدأ دو خط متفاوت باشد).



۲- اگر دو خط دارای شیب برابر و عرض از مبدأ برابر داشته باشند، بر هم منطبق هستند. (با هم برابرند).

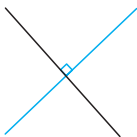


۳- اگر دو خط شیب متفاوت داشته باشند، متقاطع هستند و در یک نقطه با هم اشتراک دارند.



۴- اگر حاصل ضرب شیب دو خط -1 باشد (شیب دو خط، قرینه معکوس هم باشند)، آن دو خط بر هم عمود هستند.

در واقع اگر شیب یک خط x و شیب خط دیگر x' و $xx' = -1$ باشد، دو خط عمود بر هم هستند.



نکته دو خط عمود بر هم، با هم موازی هستند.

سوال معادله خط گذرا از نقطه $P(-1, 2)$ که موازی خط $y = 4x - 3$ باشد را بنویسید.

پاسخ اگر خط موردنظر با خط $y = 4x - 3$ موازی باشد، پس شیب آن باید ۴ باشد. همچنین این خط از نقطه $(-1, 2)$ می‌گذرد، بنابراین:

$$y = 4x + b \xrightarrow[\text{در معادله خط صدق می‌کند.}]{(-1, 2)} 2 = -4 + b \Rightarrow b = 6 \Rightarrow \text{معادله خط: } y = 4x + 6$$

سوال معادله خط عمود بر خط $3y = 2x - 1$ را که در نقطه‌ای به طول ۲ با این خط متقاطع باشد بیابید.

پاسخ شیب خط $3y = 2x - 1$ برابر $-\frac{2}{3}$ است، پس شیب خط عمود بر آن باید برابر $\frac{3}{2}$ باشد.

برای پیدا کردن نقطه‌ای از خط عمود کافی است بدانیم این خط قرار است در $x = 2$ خط $3y = 2x - 1$ را قطع می‌کند. نقطه‌ای به طول ۲ روی خط $3y = 2x - 1$ دارای عرض $y = -1$ است، پس خط عمود باید از نقطه $(2, -1)$ عبور کند:

$$y = \frac{3}{2}x + b \xrightarrow[\text{خط صدق می‌کند.}]{\text{در معادله (2, -1) در معادله}} -1 = \frac{3}{2}(2) + b \Rightarrow b = -4$$

$$\text{معادله خط: } y = \frac{3}{2}x - 4$$

سوال

برای هر جفت از خط‌های داده شده شیب را به دست آورید و وضعیت دو خط را نسبت به هم مشخص کنید. (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود)

الف) $L: y = 2x + 1$ $T: y = -\frac{1}{2}x + 1$ ب) $L: y = \frac{1}{2}x + 2$ $T: x - 2y = 2$
پ) $L: 2x + 3y = 1$ $T: 3x + 2y = 3$ ت) $L: x = 1$ $T: y = -2$

پاسخ

الف) $L: y = 2x + 1$ شیب خط $L = 2$ $T: y = -\frac{1}{2}x + 1$ شیب خط $T = -\frac{1}{2}$
چون شیب دو خط قرینه و معکوس یکدیگر هستند ($mm' = 2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$) پس دو خط عمود بر هم هستند.
ب) $L: y = \frac{1}{2}x + 2$ شیب خط $L = \frac{1}{2}$ $T: x - 2y = 2 \Rightarrow 2y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$ شیب خط $T = \frac{1}{2}$
چون دو خط شیب برابر و عرض از مبدأ متفاوت دارند، پس با هم موازی هستند.
پ) $L: 2x + 3y = 1 \Rightarrow 3y = 1 - 2x \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ شیب خط $L = -\frac{2}{3}$
 $T: 3x + 2y = 3 \Rightarrow 2y = -3x + 3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ شیب خط $T = -\frac{3}{2}$
چون شیب دو خط نابرابر است و از طرفی حاصل ضرب آن‌ها برابر -1 نیست. پس دو خط متقاطع غیر عمود هستند.
ت) خط $T: y = -2$ موازی محور x ها است و شیب آن صفر است. خط $L: x = 1$ موازی محور y ها است و شیب آن بی‌نهایت است. چون یکی از خطوط موازی محور y ها و دیگری موازی محور x ها است، پس دو خط بر هم عمودند.

سوال

مربع $ABCD$ در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است، به طوری که $A(4, 1)$ و $B(6, 3)$ دو رأس مجاور آن هستند.

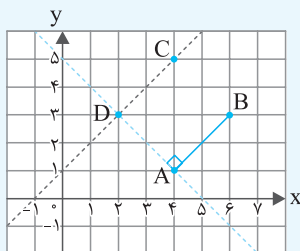
الف) شیب ضلع AB را بنویسید.

ب) اگر نقطه D رأس مجاور A باشد، شیب ضلع AD را محاسبه کرده و معادله این ضلع را بنویسید.

پ) اگر بدانیم نقطه $C(4, 5)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

پاسخ

الف) برای درک بهتر سؤال اطلاعات داده شده را در نمودار مختصات رسم می‌کنیم:



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{6 - 4} = \frac{2}{2} = 1$$

ب) چون اضلاع مربع بر هم عمودند، پس شیب ضلع AD باید قرینه و معکوس شیب ضلع AB باشد، پس داریم:

$$\text{شیب ضلع } AD = -\frac{1}{1} = -1$$

شیب خط AD برابر -1 است و از نقطه $A(4, 1)$ عبور می‌کند، بنابراین:

$$y = -x + b \Rightarrow 1 = -4 + b \Rightarrow b = 5$$

$$\text{معادله ضلع } AD: y = -x + 5$$

پ) اضلاع روبه‌رو در مربع موازی یکدیگرند، پس شیب ضلع CD با شیب ضلع AB برابر و مساوی 1 است. ضلع CD از نقطه $C(4, 5)$ عبور خواهد کرد، پس می‌توان نوشت:

$$CD: (y - 5) = 1 \times (x - 4) \Rightarrow y - 5 = x - 4 \Rightarrow y = x + 1$$

با تقاطع اضلاع AD و CD می‌توان مختصات نقطه D را پیدا کرد:

$$\begin{cases} AD: y = -x + 5 \\ CD: y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

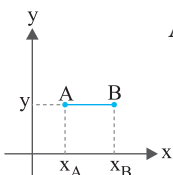
$$CD: y = x + 1 \Rightarrow 3 = x + 1 \Rightarrow x = 2$$

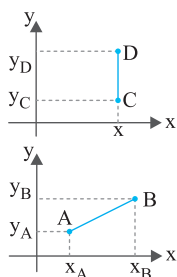
پس رأس D با مختصات $(2, 3)$ خواهد بود.

۳۹ محاسبه فاصله دو نقطه - مختصات نقطه وسط پاره خط

• محاسبه فاصله دو نقطه

۱- اگر دو نقطه A و B در یک صفحه به گونه‌ای باشند که عرض برابر داشته باشند، فاصله آن دو برابر است با: $AB = |x_A - x_B|$



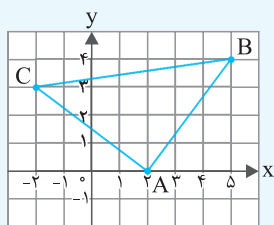


۲- اگر دو نقطه C و D در یک صفحه به گونه‌ای باشند که طول برابر داشته باشند، فاصله آن دو برابر است با: $CD = |y_C - y_D|$

۳- فاصله دو نقطه $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با: $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

کاردرکلاس [صفحه ۶ کتاب درسی]

نقاط $A(2, 0)$ و $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ را در نظر بگیرید و آن‌ها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.
الف) محیط مثلث ABC را با محاسبه طول اضلاع آن به دست آورید. ب) ABC چه نوع مثلثی است؟



پاسخ الف) $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2 - 5)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(2 + 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$

$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(5 + 2)^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$

محیط مثلث $ABC = 10 + \sqrt{50}$

ب) چون اندازه دو ضلع AB و AC با هم برابر است. پس مثلث متساوی الساقین است. از طرفی چون:

$$(\sqrt{50})^2 = (5)^2 + (5)^2 = 50$$

یعنی اضلاع مثلث در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند، پس مثلث ABC قائم‌الزاویه متساوی الساقین است.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

کاردرکلاس [صفحه ۶ کتاب درسی]

فاصله نقطه $N(-6, 8)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

پاسخ مبدأ مختصات نقطه $O(0, 0)$ است، پس طول ON برابر است با: $ON = \sqrt{(0 + 6)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

• مختصات نقطه وسط پاره خط

مختصات نقطه وسط پاره خط AB عبارت است از: $M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2})$

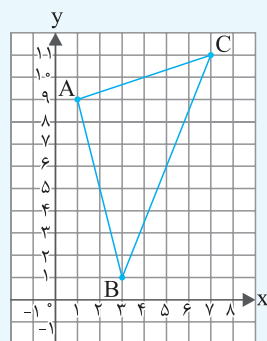
کاردرکلاس [صفحه ۷ کتاب درسی]

مثلث با رأس‌های $A(1, 9)$ ، $B(3, 1)$ و $C(7, 11)$ را در نظر بگیرید و آن را در دستگاه مختصات رسم کنید.

الف) مختصات M ، نقطه وسط ضلع BC را مشخص کنید.

ب) طول میانه AM را محاسبه کنید.

پ) معادله خطی که میانه AM روی آن قرار دارد را به دست آورید.



پاسخ الف) برای محاسبه مختصات نقطه M که وسط ضلع BC است، داریم:

$$M = (\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{3 + 7}{2}, \frac{1 + 11}{2}) = (5, 6)$$

ب) برای محاسبه طول AM با توجه به $A(1, 9)$ و $M(5, 6)$ داریم:

$$AM = \sqrt{(1 - 5)^2 + (9 - 6)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

پ) برای به دست آوردن معادله خط AM نیاز به شیب و یک نقطه داریم، ابتدا شیب را به کمک مختصات

$$m = \frac{6 - 9}{5 - 1} = -\frac{3}{4}$$

نقطه‌های A و M پیدا می‌کنیم:

$$y = -\frac{3}{4}x + b \xrightarrow{A(1,9)} 9 = -\frac{3}{4} + b \Rightarrow b = \frac{39}{4}$$

$$\text{معادله خط: } y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$

نکته اگر قرینه نقطه A نسبت به نقطه B را A' بنامیم، نقطه B وسط پاره خط AA' خواهد بود. یعنی:

$$x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2}, y_B = \frac{y_A + y_{A'}}{2}$$

کاردرکلاس [صفحه ۷ کتاب درسی]

الف) نقطه N(۵, -۴) وسط پاره خط واصل بین دو نقطه A و B(۷, -۲) است. مختصات نقطه A را بیابید.

ب) قرینه نقطه C(۱, ۲) نسبت به نقطه M(-۱, ۴) را به دست آورید.

پاسخ الف) نقطه N وسط پاره خط AB است. پس داریم:

$$\begin{cases} x_N = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 5 = \frac{x_A + 7}{2} \Rightarrow x_A + 7 = 10 \Rightarrow x_A = 3 \\ y_N = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -4 = \frac{y_A - 2}{2} \Rightarrow y_A - 2 = -8 \Rightarrow y_A = -6 \end{cases}$$

پس مختصات نقطه A برابر است با: A(۳, -۶)

ب) اگر قرینه نقطه C نسبت به M را C' بنامیم، می‌دانیم نقطه M وسط پاره خط CC' است، پس داریم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_C + x_{C'}}{2} \Rightarrow -1 = \frac{1 + x_{C'}}{2} \Rightarrow x_{C'} + 1 = -2 \Rightarrow x_{C'} = -3 \\ y_M = \frac{y_C + y_{C'}}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2 + y_{C'}}{2} \Rightarrow y_{C'} + 2 = 8 \Rightarrow y_{C'} = 6 \end{cases}$$

پس مختصات نقطه C' برابر است با: C'(-۳, ۶)

سوال

نقطه‌های A(-۱, ۶)، B(-۵, ۱) و C(۷, -۴) سه رأس یک مثلث اند، معادله عمودمنصف ضلع AC را بنویسید. [تهران - مدرسه دکتر حسابی - ری ۱۳۰۰]

پاسخ عمودمنصف ضلع AC از وسط این ضلع عبور می‌کند، اگر این نقطه را D بنامیم داریم:

$$\begin{cases} x_D = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \\ y_D = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{6 - 4}{2} = 1 \end{cases}$$

عمودمنصف ضلع AC از نقطه D(۳, ۱) عبور خواهد کرد و شیب آن هم قرینه معکوس شیب خط AC خواهد بود (چون بر AC عمود است) پس داریم:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{6 + 4}{-1 - 7} = \frac{10}{-8} = -\frac{5}{4}$$

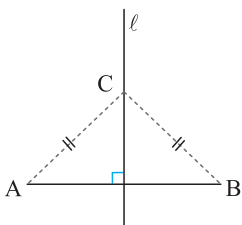
بنابراین شیب عمودمنصف ضلع AC برابر $\frac{4}{5}$ است. پس داریم:

$$y = \frac{4}{5}x + b \xrightarrow{D(3,1)} 1 = \frac{4}{5} \times 3 + b \Rightarrow b = -\frac{7}{5}$$

$$\text{معادله عمودمنصف AC: } y = \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$$

نکته هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

به عنوان مثال اگر خط l عمودمنصف پاره خط AB باشد و نقطه C روی آن باشد، آنگاه: AC = BC
همچنین اگر بخواهیم نقطه‌ای در صفحه پیدا کنیم که فاصله آن از دو سر پاره خط برابر باشد، آن نقطه روی عمودمنصف پاره خط است.



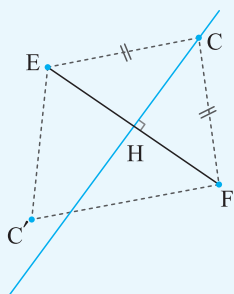


سوال

یک روستا دو دبستان دارد که مختصات آن‌ها در نقشه اداره آموزش و پرورش به صورت $E(3, 10)$ و $F(7, 2)$ است. با هدف اینکه هر دانش‌آموز در نزدیک‌ترین مدرسه به خانه خود ثبت‌نام کند، معادله خطی را بنویسید که روستا را به دو قسمت تقسیم کند.

پاسخ

اگر عمود منصف پاره خط EF را رسم کنیم، نقاطی که روی عمود منصف باشند از هر دو مدرسه به یک فاصله‌اند و نقاطی که در یک طرف عمود منصف باشند، به مدرسه همان طرف نزدیک‌ترند. مثلاً روستای C' به مدرسه E نزدیک‌تر است.



$$x_H = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5$$

$$y_H = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{10 + 2}{2} = 6 \Rightarrow H(5, 6)$$

$$m_{EF} = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \frac{10 - 2}{3 - 7} = \frac{8}{-4} = -2$$

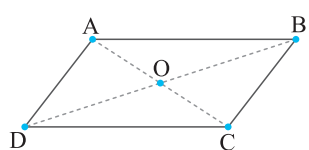
$$a = \frac{1}{2}$$

شیب خط عمود منصف پاره خط EF برابر $\frac{1}{2}$ است و از نقطه $H(5, 6)$ می‌گذرد.

$$y = ax + b \xrightarrow{H(5, 6)} 6 = \frac{1}{2}(5) + b \Rightarrow b = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

می‌دانیم قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. پس در متوازی الاضلاع $ABCD$ نقطه O هم وسط قطر AC و هم وسط قطر BD است. بنابراین:



$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D \\ \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

دقت کنید مستطیل، لوزی و مربع هم نوعی متوازی الاضلاع هستند، پس رابطه بیان شده در مورد این چهارضلعی‌ها هم برقرار است.

سوال

نقاط $(0, 1)$ ، $(2, -1)$ و $(6, 3)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت مستطیل را محاسبه کنید.

پاسخ

نقاط داده شده را نام‌گذاری می‌کنیم:

حالا شیب خط‌های AB و BC را محاسبه می‌کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - 2}{1 - 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{-1 - 3}{2 - 6} = \frac{-4}{-4} = 1$$

شیب دو خط AB و BC عکس و قرینه یکدیگرند، پس بر هم عمودند. در نتیجه دو ضلع مجاور مستطیل هستند.

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{4 + 0} = 2\sqrt{2}$$

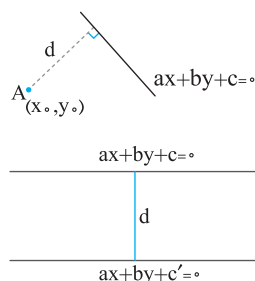
$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2 - 6)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \text{طول} \times \text{عرض} = 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8 \times 2 = 16$$

۴۰+ فاصله نقطه از خط

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته ~~~~~ فاصله دو خط موازی از رابطه زیر هم به دست می‌آید:

بدهی رایج برقی دانش‌آموزان بدون توجه به اینکه در رابطه مناسبه فاصله نقطه از خط، باید همه اجزای معادله خط در سمت چپ باشند و سمت راست برابر صفر باشد، شروع به حل سؤال می‌کنند. در حالی که باید برای برطرف کردن این خطا ابتدا همه اجزا را به سمت چپ منتقل کنید.

مثال: فاصله نقطه $(1, 2)$ از خط $y = 2x + 1$ را بیابید.

پاسخ: روش نادرست:

$$d = \frac{|1 \times 2 + 2 \times 1 + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$y = 2x + 1 \Rightarrow y - 2x - 1 = 0$$

$$d = \frac{|1 \times 2 - 2 \times 1 - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

روش درست: ابتدا معادله خط را به فرم استاندارد می‌نویسیم:

کاردکلاس [صفحه ۹ کتاب درسی]

فاصله نقطه $P(7, -4)$ را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر به دست آورید:

الف) $L: 2x + y = 5$

ب) $T: x = 5$

پ) $\Delta: y = 0$

پاسخ الف) ابتدا معادله خط را به فرم استاندارد درمی‌آوریم:

$$L: 2x + y - 5 = 0$$

$$d = \frac{|2 \times 7 + 1 \times (-4) - 5|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2}} = \frac{|14 - 4 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

حال فاصله نقطه $P(7, -4)$ را از خط L محاسبه می‌کنیم:

ب) معادله استاندارد این خط $T: x - 5 = 0$ است. دقت کنید که در واقع در این خط ضریب y صفر است. پس داریم:

$$d = \frac{|1 \times 7 - 5|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

پ) معادله این خط استاندارد است $\Delta: y = 0$ و در این خط ضریب x صفر است. پس داریم:

$$d = \frac{|1 \times (-4)|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \frac{4}{1} = 4$$

سوال فاصله دو خط موازی $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ را به دست آورید.

پاسخ روش اول: کافی است فاصله یک نقطه از خط $-10x + 24y + 10 = 0$ را از خط $5x - 12y + 8 = 0$ به دست آوریم. برای این کار عرض نقطه مورد نظر روی خط $-10x + 24y + 10 = 0$ را صفر در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$y = 0 \Rightarrow -10x + 10 = 0 \Rightarrow 10x = 10 \Rightarrow x = 1$$

پس کافی است فاصله نقطه $A(1, 0)$ را از خط $5x - 12y + 8 = 0$ به دست آوریم.

$$d = \frac{|5 \times 1 - 12 \times 0 + 8|}{\sqrt{(5)^2 + (-12)^2}} = \frac{13}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

پس داریم:

روش دوم: ابتدا خط $-10x + 24y + 10 = 0$ را بر -2 تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$5x - 12y - 5 = 0$$

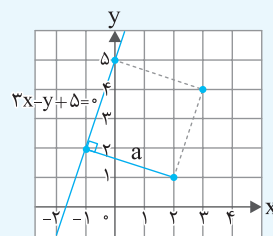
حال از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ فاصله دو خط را به دست می‌آوریم:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 + 5|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

سوال مساحت مربعی را به دست آورید که یک رأس آن $(2, 1)$ و یک ضلع آن بر روی خط $3x - y + 5 = 0$ قرار داشته باشد. [تهران - مدرسه مهریه - دی ۱۴۰۰]

پاسخ با قرار دادن نقطه $(2, 1)$ در معادله $3x - y + 5 = 0$ متوجه می‌شویم این نقطه روی این ضلع قرار ندارد. (چون $3 \times 2 - 1 + 5 \neq 0$) پس اگر فاصله نقطه $(2, 1)$ را از خط $3x - y + 5 = 0$ به دست آوریم طول ضلع مربع (a) به دست می‌آید.

(در شکل یک مربع فرضی رسم شده است.)



$$a = \frac{|3 \times 2 - 1 \times 1 + 5|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$S = a^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$$

پس مساحت مربع برابر است با:



[تهران - مدرسه دکنتر حسابی - دی ۱۴۰۰]

سوال نقطه‌های $A(-1, 6)$ و $B(-5, 1)$ و $C(7, -4)$ سه رأس یک مثلث اند، طول ارتفاع AH را به دست آورید.**پاسخ** برای محاسبه طول ارتفاع AH باید فاصله نقطه A از ضلع BC را بیابیم، بنابراین اول باید معادله ضلع BC را بنویسیم، پس:

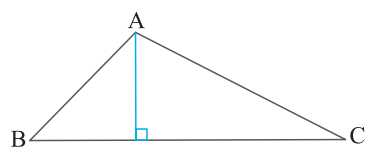
$$m_{BC} = \frac{-4-1}{7-(-5)} = \frac{-5}{12}$$

$$BC \text{ ضلع: } y - y_B = m_{BC}(x - x_B) \Rightarrow y - 1 = \frac{-5}{12}(x + 5) \Rightarrow 12y - 12 = -5(x + 5)$$

$$\Rightarrow 12y - 12 = -5x - 25 \Rightarrow 5x + 12y + 13 = 0$$

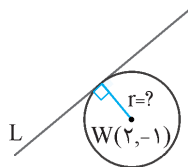
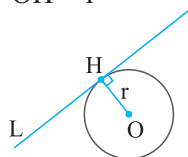
$$AH = \frac{|5 \times (-1) + 12 \times 6 + 13|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{80}{\sqrt{169}} = \frac{80}{13} = \frac{80\sqrt{13}}{13}$$
 پس داریم: پس طول AH برابر است با فاصله نقطه $A(-1, 6)$ از ضلع BC .

نکته برای پیدا کردن مساحت مثلث با رئوس داده شده A و B و C کافی است فاصله یکی از رئوس مانند A را از ضلع روبه‌روی آن یعنی BC پیدا کنید. این فاصله همان ارتفاع مثلث است. پس با محاسبه فاصله دو نقطه دیگر (C و B) طول قاعده به دست می‌آید. بنابراین با رابطه زیر می‌توان مساحت را پیدا کرد:



$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{2} \times \text{مساحت}$$

$$OH = r$$

نکته اگر خط L بر دایره C مماس باشد، فاصله مرکز دایره از خط L برابر است با شعاع دایره؛ یعنی:**کاردرکلاس** [صفحه ۹ کتاب درسی]خط $L: 3x - 4y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.

$$r = \frac{|3 \times 2 - 4 \times (-1)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{9+16}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2$$
 پس داریم:

نمرین‌های امتحانی

۳۸ وضعیت دو خط نسبت به هم

۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$L: 2x - y = 1$$

$$T: y = 2x - 3$$

$$\Delta: x + 2y = 0$$

۲* دو نقطه $A(2m+1, 3)$ و $B(2-m, -1)$ را در نظر بگیرید. m را طوری بیابید که خط گذرنده از نقاط A و B بر نیمساز ربع اول و سوم عمود باشد.

[نمونه‌دروستی آیت... بهاء الدینی - دی ۱۴۰۰ / ۳ بار تکرار]

درست ☐ نادرست ☐۳ دو خط $4x + 6y + 8 = 0$ و $2x - 3y = 4$ بر هم منطبق اند.درست ☐ نادرست ☐۴ شیب خط عمود بر خط $-3x + 2y + 1 = 0$ برابر $\frac{2}{3}$ است.

بلند
یاسج

- ۵ معادله خط گذرنده از نقطه $P(2, -1)$ را بنویسید؛ به طوری که با خط $y = 3x - 4$ موازی باشد.
- ۶ خط l از مبدأ مختصات می‌گذرد و با خطی که از نقاط $A(1, 2)$ و $B(-3, 0)$ می‌گذرد، موازی است؛
(الف) معادله خط l را بنویسید.
(ب) خط l ، خط $y = -4$ را با کدام طول قطع می‌کند؟
- ۷* شیب عمود منصف پاره خط AB که در آن $A(2, 4)$ و $B(0, -6)$ است را به دست آورید.
[تهران - مدرسه امام - مهر باقر - فرداد ۱۳۰۰ / ۲ بار تکرار]
- ۸ در مثلث ABC با رئوس $A(1, 2)$ و $B(4, 5)$ و $C(3, 7)$ معادله ارتفاع CH را بنویسید.
- ۹ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، نشان دهید خط گذرا از نقاط $P(a, b)$ و $Q(b, a)$ همواره بر خط $y = x$ عمود است.
- ۱۰ خط L به معادله $2y - 3x = 1$ و خط T به معادله $x + (m^2 - 1)y = 5$ را در نظر بگیرید.
(الف) m را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.
(ب) به ازای چه مقداری از m ، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

۳۹ محاسبه فاصله دو نقطه - مختصات نقطه وسط پاره خط

بلند
یاسج

- ۱۱* ثابت کنید مثلث با رئوس $A(4, 3)$ و $B(6, 2)$ و $C(6, 3)$ قائم‌الزاویه است.
[پیرفهر - مدرسه سماء - دی ۱۳۰۰ / ۲ بار تکرار]
- ۱۲ مختصات قرینه نقطه $A(1, 2)$ نسبت به نقطه $O(3, 5)$ را به دست آورید.
- ۱۳* روی خط $y = x + 4$ نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از دو نقطه $A(1, 4)$ و $B(3, -4)$ به یک اندازه باشد.
[تهران - مدرسه دکتر شهریار - فرداد ۱۳۰۰ / ۲ بار تکرار]
- ۱۴* نقاط $A(-2, 4)$ و $B(4, -6)$ دو سر یک قطر دایره هستند، مطلوب است:
(الف) مختصات مرکز دایره
(ب) طول شعاع دایره
- ۱۵* مثلث ABC به رأس‌های $A(1, 2)$ و $B(5, 4)$ و $C(2, -3)$ را رسم کنید و طول میانه وارد بر ضلع AB را بیابید.
[خرمشهر - مدرسه بوستان امامت - دی ۱۳۰۰ / ۲ بار تکرار]
- ۱۶ اگر سه رأس یک متوازی‌الاضلاع به ترتیب نقاط $A(1, 3)$ و $B(3, 2)$ و $C(5, 6)$ باشند، مختصات رأس دیگر (D) آن را بیابید.
- ۱۷ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $P(a, b)$ و $Q(b, a)$ ، نشان دهید نقطه وسط پاره خط PQ همیشه روی $y = x$ واقع است.
- ۱۸ اگر خط $2y - 3x + 6 = 0$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع کند، فاصله نقطه $C(-1, 4)$ از وسط AB چقدر است؟
- ۱۹* فاصله مبدأ مختصات از نقطه وسط پاره خط AB که در آن $A(2, 5)$ و $B(-4, 1)$ هستند، چقدر است؟
[قم - نمونه دولتی آیت‌الله... بهاء‌الدینی - دی ۱۳۰۰ - با انگرگی تغییر / ۲ بار تکرار]
- ۲۰ دو نقطه $A(m - 2, 2)$ و $B(m, 2m)$ را در نظر بگیرید. اگر فاصله نقطه وسط پاره خط AB تا مبدأ مختصات برابر $\sqrt{2}$ باشد، مقادیر ممکن برای m را بیابید.
- ۲۱ قرینه نقطه $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به دست آورید.

+ ۴۰ فاصله نقطه از خط

بلند
یاسج

- ۲۲* فاصله نقطه $A(2, 3)$ از خط $2y - x = 2$ را به دست آورید.
[ملایر - مدرسه خرونگان - دی ۱۳۰۰ / ۳ بار تکرار]
- ۲۳ فاصله نقطه $P(7, -4)$ را از خط $L: 2x + y = 5$ به دست آورید.
- ۲۴* اگر خط $3x - 4y + 1 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $A(5, -1)$ مماس باشد، شعاع دایره را بیابید.
[قم - مدرسه شاهد نهمیه - دی ۱۳۰۰ / ۲ بار تکرار]
- ۲۵ اگر فاصله نقطه $A(2m - 1, 5)$ از خط $x = -2$ برابر 7 باشد، مختصات A را به دست آورید. این مسئله چند جواب دارد؟
- ۲۶* اگر $A(0, 6)$ و $B(3, 2)$ و $C(1, -3)$ باشند، مساحت مثلث ABC را به دست آورید.
[ملایر - مدرسه خرونگان - دی ۱۳۰۰ / ۲ بار تکرار]
- ۲۷ دایره‌ای به مرکز $(2, 1)$ بر دو خط $3x + 4y = 5$ و $12y - 5x = a$ مماس است. مقادیر ممکن برای a را به دست آورید.
[مازندران - مدرسه خرونگان - دی ۱۳۰۰]
- ۲۸ دو خط $3x + 4y = 25$ و $6x + 8y = 10$ مماس بر دایره‌ای هستند. مساحت دایره را بیابید.
[تهران - مدرسه سوره - دی ۱۳۰۰]
- ۲۹ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L: y = 2x - 1$ واقع است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.
- ۳۰ خطوط $2x - y = 1$ و $x + 2y = -6$ معادلات دو ضلع یک مستطیل هستند و $A(1, -1)$ یک رأس آن است، مساحت این مستطیل را به دست آورید.
[همدان - مدرسه حضرت آینه - دی ۱۳۰۰]