

مجموعه، الگو و دنباله

فصل اول



فصل اول پل ارتباطی ریاضی نهم و دهم است؛ زیرا بسیاری از موضوعات مانند نظریه مجموعه‌ها و الگوها در این فصل کامل‌تر می‌شوند و از طرفی با مفاهیمی آشنا می‌شویم که پیش‌نیاز بسیاری از موضوعات ریاضی در متوسطه دوم هستند. بنابراین با انگیزه و دقت کافی درس‌نامه‌های این فصل را مطالعه نموده و حتماً مثال‌ها را برای خودتان دوباره حل کنید و زمانی که از یادگیری موضوعات مطمئن شدید، تمرین‌ها را در حل کرده و سپس با مراجعه به پاسخنامه آن‌ها را تصحیح کنید.

همه تمرین‌های صفحه‌های ۱۲، ۱۳، ۲۰ و ۲۷ از کتاب درسی را با دقت حل کنید.

مفاهیم کلیدی



آزمون تشخیصی مفاهیم کلیدی

۱. اگر $A = (-3, 2]$ و $B = [-1, 2)$ و $C = (-\infty, -2]$ باشد، بازه مجموعه $(A - B) \cap C$ را بنویسید. بلدیدم بلدیدم

۲. کدام یک از مجموعه‌های زیر، متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

الف) مجموعه سلول‌های عصبی مغز انسان
ب) مجموعه مقسوم‌علیه‌های یک عدد طبیعی

$$B = \left\{ \frac{1}{n^2 + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{ت)}$$

ج) مضارب طبیعی عدد ۱۷

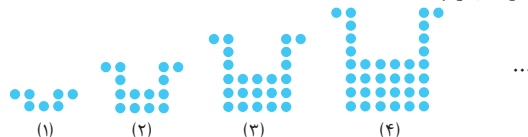
$$A = \{x \mid x \in \mathbb{W}, x^2 > 16\} \quad \text{پ)}$$

ث) مجموعه تمام اتومبیل‌های جهان

۳. اگر $U = (-4, 3]$ مجموعه مرجع باشد، متمم مجموعه $[2, 3] \cup [-3, 1)$ را روی محور نشان دهید و بازه آن را بنویسید.

۴. اگر $n(A - B) = 1$ و $n(B - A) = 13$ و $n(B) = 4n(A)$ مقدار $n(A \cup B)$ را به دست آورید.

۵. تعداد نقطه‌ها در شکل n ام الگوی زیر چقدر است؟



۶. اگر در یک الگوی خطی، $a_3 = 17$ و $a_{10} = 38$ ، جمله پنجم این الگو چند است؟

۷. دنباله $t_n = \frac{100}{n+3} + 9$ چند جمله صحیح دارد؟

۸. در یک دنباله حسابی، $a_7 + a_9 = 14$ و $a_7 - a_9 = 280$. قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

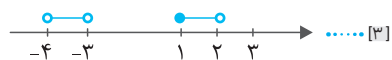
۹. در یک دنباله هندسی، با فرض $t_{15} t_{10} t_{25} = 729$ حاصل $\frac{t_4 t_{17}}{t_1}$ را حساب کنید.

پاسخ

[۱] $(-3, -2]$

[۲] الف) متناهی

[۳] ت) نامتناهی



[۴] 17

[۶] $a_5 = 23$

[۸] $d = -4$

پ) نامتناهی

ج) نامتناهی

$A' = (-4, -3) \cup [1, 2)$

[۵] $t_n = n^2 + 4n + 2$

[۷] n می‌تواند اعداد $1, 2, 7, 17, 22, 47, 97$ باشد (هفت عدد).

[۹] $\frac{t_4 t_{17}}{2 t_1} = 4 / 5$

● درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

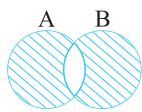
+ ۱ مجموعه‌های اعداد و بازه‌ها

● مجموعه‌های اعداد

مجموعه از مفاهیم نسبتاً جدید ریاضیات است که در ۱۰۰ سال اخیر بسیاری از نظریه‌های دیگر بر مبنای آن پایه‌گذاری شده‌اند. می‌دانیم مجموعه، گروهی از اشیاء است که عضوهایش کاملاً مشخص باشند.

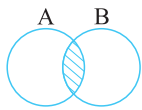
اگر عضوی مانند a به مجموعه T تعلق داشته باشد، می‌نویسیم $a \in T$ و اگر عضوی مانند b به مجموعه T تعلق نداشته باشد، می‌نویسیم $b \notin T$. اگر تک‌تک عضوهای مجموعه A به مجموعه B تعلق داشته باشند، می‌نویسیم: $A \subseteq B$ و می‌خوانیم A زیرمجموعه B است و اگر دست کم یکی از عضوهای مجموعه A به مجموعه B تعلق نداشته باشد، می‌نویسیم: $A \not\subseteq B$ و می‌خوانیم A زیرمجموعه B نیست. در گذشته با عملیات بین مجموعه‌ها آشنا شدیم:

اجتماع دو مجموعه:



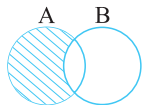
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$

اشتراک دو مجموعه:



$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \in B\}$

تفاضل دو مجموعه:



$A - B = \{x \mid x \in A \text{ و } x \notin B\}$

سوال اگر $A = \{1, 2, 5, 8\}$ ، $B = \{2, 3, 5\}$ و $C = \{1, 3, 7\}$ ، مجموعه $(A - C) \cap (B \cup C)$ را با عضوهایش بنویسید.

پاسخ

$A - C$ شامل همهٔ عضوهای A است که در C عضویت ندارند:

$A - C = \{1, 2, 5, 8\} - \{1, 3, 7\} = \{2, 5, 8\}$

$B \cup C$ شامل همهٔ عضوهای B یا در C عضو هستند یا در هر دو مجموعه عضو هستند:

$B \cup C = \{2, 3, 5\} \cup \{1, 3, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$(A - C) \cap (B \cup C)$ شامل همهٔ عضوهای مشترک دو مجموعه $A - C$ و $B \cup C$ است.

$(A - C) \cap (B \cup C) = \{2, 5, 8\} \cap \{1, 2, 3, 5, 7\} = \{2, 5\}$

مجموعه‌های معروف و پرکاربردی در ریاضیات وجود دارد که لازم است نام و نماد آن‌ها را به خاطر بسپاریم.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$: مجموعه عددهای طبیعی $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: مجموعه عددهای حسابی (صحیح نامنفی)

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: مجموعه عددهای صحیح $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$: مجموعه عددهای گویا

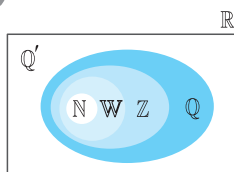
$\mathbb{Q}' = \{a \mid a \notin \mathbb{Q}\}$: مجموعه عددهای گنگ $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$: مجموعه عددهای حقیقی

مجموعه عددهای گنگ شامل همهٔ عددهایی است که نمی‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد. (مانند $\sqrt{2}$ ، π ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، ...)

همچنین هر عددی که گنگ یا گویا باشد، یک عدد حقیقی است. به بیان دیگر، همهٔ مجموعه‌های عددی که تاکنون با آن‌ها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از عددهای حقیقی‌اند. بنابراین هر عدد حقیقی بایک نقطه روی محور اعداد حقیقی متناظر است و هر نقطه روی این محور حتماً متناظر بایک عدد حقیقی متناظر است.



به طور خلاصه می توان نوشت:



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq \mathbb{R}$$

$$Q \cap Q' = \emptyset, Q' \subseteq \mathbb{R}$$

$$Q' \cap Z = Z \quad (۴)$$

$$N \cup W = W \quad (۳)$$

$$\mathbb{R} - Q = Z \quad (۲)$$

$$Z - N = \{0\} \quad (۱)$$

سوال کدام گزینه درست است؟

پاسخ گزینه «۳»

گزینه «۱»: نادرست؛ $Z - N = \{0\}$ گزینه «۳»: درست؛ $N \subseteq W \Rightarrow N \cup W = W$ گزینه «۲»: نادرست؛ $\mathbb{R} - Q = Q'$ گزینه «۴»: نادرست؛ $Q' \cap Z = \emptyset$

سوال

مشخص کنید هر نقطه، مکان تقریبی کدام یک از اعداد مجموعه $\{-2/7, \sqrt{10}, -\pi, \frac{7}{3}\}$ است؟

پاسخ

$$-\pi \approx -3/14 \Rightarrow A = -\pi, \sqrt{10} \approx 3/1 \Rightarrow B = \sqrt{10}$$

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \Rightarrow C = \frac{7}{3}, D = -2/7$$

سوال

چند تا از گزاره های مقابل درست هستند؟

$$\frac{4}{\sqrt{9}-3} \in \mathbb{R}, 0 \notin \mathbb{Q}, \frac{-8}{2} \in \mathbb{Z}, -2^4 \notin \mathbb{N}$$

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ

گزینه «۲»: می دانیم کسری که مخرجش صفر شود، تعریف نشده است و جزء اعداد حقیقی نیست، بنابراین:

$$\frac{4}{\sqrt{9}-3} = \frac{4}{0} \notin \mathbb{R}$$

$$0 \in \mathbb{Q}$$

$$-\frac{8}{2} = -4, -4 \in \mathbb{Z}$$

$$-2^4 = -16, -16 \notin \mathbb{N}$$

صفر عددی گویا است، زیرا می توان نوشت: $\frac{0}{\text{عددی غیر صفر}} = 0$ ، در نتیجه:

بنابراین دو تا از گزاره ها درست و دو تا نادرست اند.

● بازه ها

می دانیم مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ شامل همه اعداد حقیقی از ۱ تا ۲ است. این مجموعه بی شمار عضو دارد. بنابراین مشخص کردن تک تک نقاط این مجموعه روی محور اعداد حقیقی میسر نیست. چنین زیرمجموعه هایی از $\mathbb{R}$ را که بیانگر قطعه ای از محور اعداد حقیقی هستند، **بازه** یا **فاصله** می نامیم. بازه هایی مانند A را که شامل هر دو نقطه انتهایی خود می باشند، **بازه بسته** از ۱ تا ۲ می نامیم و آن را با نماد $[1, 2]$ نشان می دهیم. حال اگر نقاط ابتدایی و انتهایی این بازه یعنی ۱ و ۲ را حذف کنیم، مجموعه $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$ به دست می آید که شامل همه اعداد حقیقی بین ۱ و ۲ است و آن را **بازه باز** بین ۱ و ۲ می نامیم و با نماد $(1, 2)$ نشان می دهیم.

اگر از مجموعه A فقط نقطه ۱ را حذف کنیم، مجموعه $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$ به دست می آید که آن را **بازه نیم باز** می نامیم و با نماد $(1, 2]$ نشان می دهیم. به طور کلی در بازه نویسی، هرگاه از نمادهای «]» یا «[» استفاده کنیم، یعنی خود عدد نیز به بازه تعلق دارد؛ اما اگر از نمادهای «)» یا «(» استفاده کنیم، یعنی خود عدد به بازه تعلق ندارد.

در جدول زیر، a و b دو عدد حقیقی دلخواه و $a < b$ است. دایره توخالی نشان می دهد که آن نقطه عضو بازه نیست و دایره توپر نشان می دهد که آن نقطه عضو بازه است.

نمایش هندسی (روی محور)	نمایش مجموعه ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم باز

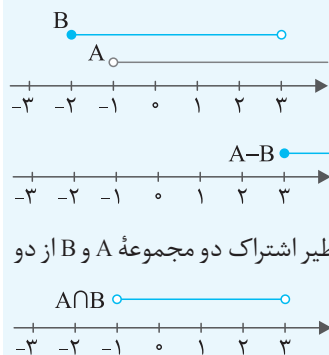
نمادهای (a, b) و $[a, b]$ در بازه ها را با نمادهای ب.م.م. و ک.م.م. اشتباه نگیر. همچنین نماد (a, b) شبیه مفتحات نقطه است که باید مراقب باشی اشتباه نگیری.

برای نشان دادن بازه‌هایی مانند $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ از نماد $(a, +\infty)$ (یا $+\infty$ را بخوانید مثبت بی‌نهایت) و برای نمایش بازه‌هایی مانند $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ از نماد $(-\infty, a)$ استفاده می‌کنیم. $+\infty$ یا $-\infty$ عدد حقیقی نیستند، بلکه دو نماد هستند که نشان می‌دهند بازه از راست یا چپ بی‌پایان است. چون $+\infty$ یا $-\infty$ مکان دقیق و مشخصی روی محور ندارند، هنگام نوشتن آن‌ها در بازه‌ها از « $\gg$ » یا « $\ll$ » استفاده می‌کنیم. در جدول زیر عددی دلخواه و حقیقی است.

نمایش هندسی روی محور	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$(a, +\infty)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a, +\infty)$	نیم باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم باز
	$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$	باز

سوال بازه‌های $A = (-1, +\infty)$ و $B = [-2, 3]$ را روی محور رسم کرده و بازه مجموعه‌های $A - B$ و $A \cap B$ را بنویسید.

پاسخ



$A - B$ روی محور یعنی قسمت‌هایی از بازه A که با بازه B مشترک نیست. $A - B$ شامل همهٔ عددهای حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی ۳ است. دقت کنید که $3 \notin B$ و $3 \in A$ پس $3 \in (A - B)$ و بازه از چپ بسته است.

بنابراین: $A - B = [3, +\infty)$.

$A \cap B$ شامل همهٔ عضوهای مشترک بازه‌های A و B است. توجه کنید که $-1 \notin A$ و $3 \notin B$ ، پس بازهٔ نظیر اشتراک دو مجموعهٔ A و B از دو طرف باز است.

بنابراین: $A \cap B = (-1, 3)$.

کاردکلاس [صفحهٔ ۵ کتاب درسی]

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید:

- الف) $\frac{4}{3} \in [-\frac{1}{2}, 2)$ ب) $-2 \in (-2, 0]$ پ) $0 \in (-2, 0)$ ت) $-2 \in \{-2, 0\}$ ث) $-1 \in \{-2, 0\}$
 ج) $[-1, 2] \subseteq (-1, 2)$ چ) $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$ ح) $\emptyset \subseteq (-17, 0]$ خ) $[2, 5) = (2, 5]$ د) $\sqrt{2} \in (0, 1)$

پاسخ قبل از هر چیز دقت کنید که $\{0, 1\}$ یک مجموعه دو عضوی شامل صفر و یک است؛ اما $(0, 1)$ زیرمجموعه‌ای از عددهای حقیقی بین صفر و یک است که بی‌شمار عضو دارد.

ث) ×

ت) ✓

پ) ✓

ب) ×

الف) ✓ زیرا: $\frac{4}{3} < \frac{4}{3} < 2 \Rightarrow \frac{4}{3} \in [-\frac{1}{2}, 2)$

ج) × زیرا: ۲ و ۱ عضو بازه $[-1, 2]$ هستند؛ اما عضو بازه $(-1, 2)$ نیستند.

چ) ✓ زیرا: $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2) \Rightarrow -1 < 0 < 2, -1 < 1 < 2$

ح) ✓

خ) × زیرا: $[2, 5] \neq [2, 5)$

د) × زیرا: $1 < \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} \notin (0, 1)$

نکته در بازه‌های (a, b) و $[a, b]$ و $(a, b]$ و $[a, b)$ ، عدد حقیقی $b - a$ را طول بازه می‌نامیم.

سوال اگر طول بازه $(-3a + 1, a + 3)$ برابر ۱۸ باشد، طول بازه $(a - 2, 2a + 1)$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ گزینه «۴»؛ طول بازه $(-3a + 1, a + 3)$ برابر است با: $a + 3 - (-3a + 1)$. بنابراین:

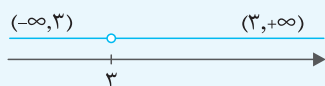
$$a + 3 - (-3a + 1) = 18 \Rightarrow a + 3 + 3a - 1 = 18 \Rightarrow 4a + 2 = 18 \Rightarrow 4a = 16 \Rightarrow a = 4 (*)$$

پس طول بازه $(a - 2, 2a + 1)$ برابر است با:

$$2a + 1 - (a - 2) = 2a + 1 - a + 2 = a + 3 \stackrel{(*)}{=} 4 + 3 = 7$$

تمرین [صفحه ۷ کتاب درسی]

مجموعه $\mathbb{R} - \{3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.



$$\mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

پاسخ

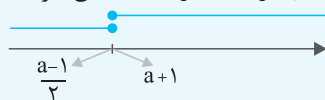
سوال اگر $3 \in [3a, a + 4]$ و $a \in (m, n]$ مقدار $m + n$ را بنویسید.

$$3 \in [3a, a + 4] \Rightarrow \begin{cases} 3a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \\ 3 < a + 4 \Rightarrow -1 < a \end{cases} \Rightarrow -1 < a \leq 1 \Rightarrow a \in \left(-1, 1\right] \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 1 \end{cases} \Rightarrow m + n = 0$$

پاسخ

سوال می‌دانیم $\left(-\infty, \frac{a-1}{2}\right] \cap [a+1, +\infty)$ مجموعه‌ای تک‌عضوی است. مقدار a را بنویسید.

پاسخ با توجه به محور، وقتی اشتراک دو بازه، مجموعه‌ای تک‌عضوی است که انتهای بازه سمت چپ بر ابتدای بازه سمت راست منطبق شود.



$$\frac{a-1}{2} = a+1 \xrightarrow{\times 2} a-1 = 2a+2 \Rightarrow a-2a = 2+1 \Rightarrow -a = 3 \Rightarrow a = -3$$

بنابراین:

سوال اگر $0 < a < 1$ ، مجموعه $(-a, a^2) \cup (a^3, 2)$ کدام است؟

(۲, a^2) (۴)

(-a, ۲) (۳)

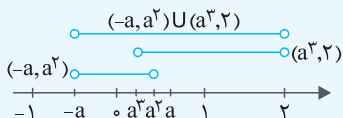
(-a, a^3) (۲)(a^2 , a^3) (۱)

پاسخ گزینه «۳»

روش اول: دقت کنید عددهای حقیقی که بین صفر و یک قرار دارند، هر چقدر که به توان عدد بزرگ‌تری برسند حاصلشان کوچک‌تر می‌شود. بنابراین:

$$0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^3 < a^2 < a$$

با توجه به محور فرضی زیر پاسخ می‌دهیم.



$$(-a, a^2) \cup (a^3, 2) = (-a, 2)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{8}, 2\right) = \left(-\frac{1}{2}, 2\right) \Rightarrow \text{جواب} = (-a, 2)$$

روش دوم: با فرض $a = \frac{1}{2}$ داریم:

۲ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای مانند $A = \{1, 2, 3\}$ دارای سه عضو است، یعنی $n(A) = 3$ ، اما تعداد عضوهای مجموعه $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ را نمی‌توان با یک عدد حسابی بیان کرد.

به مجموعه‌هایی مانند A که تعداد عضوهایشان قابل شمارش است و می‌توان آن را با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه «متناهی» یا «با پایان» و به مجموعه‌هایی مانند B که تعداد عضوهایشان را نمی‌توان با عددی حسابی بیان کرد، مجموعه «نامتناهی» یا «بی‌پایان» می‌گوییم. در مجموعه نامتناهی تعداد اعضا از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ‌تر است.

کاردرکلاس [صفحه ۶ کتاب درسی]

متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص می‌کنیم.

مجموعه	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)
مجموعه اعداد اول یک رقمی			
مجموعه انسان‌های روی زمین			
مجموعه اعداد طبیعی فرد			
مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان			
مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات			
مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما			
بازه (۰, ۱)			

پاسخ

مجموعه	نامتناهی	متناهی	تعداد اعضا (در مورد مجموعه‌های متناهی)
مجموعه اعداد اول یک رقمی		✓	$A = \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow n(A) = 4$
مجموعه انسان‌های روی زمین		✓	در لحظه‌ای مشخص این مجموعه متناهی است، زیرا درست است که تعداد اعضا خیلی زیاد است اما بالاخره عددی حسابی خواهد بود.
مجموعه اعداد طبیعی فرد	✓		$\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ بی‌شمار عضو دارد.
مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان		✓	هرچند عددی بسیار بزرگ است اما عددی حسابی است.
مجموعه تمام دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات	✓		شعاع می‌تواند هر عدد حقیقی مثبت باشد پس بی‌شمار دایره می‌توان رسم کرد.
مجموعه دانش‌آموزان مدرسه شما		✓	تعداد دانش‌آموزان مدرسه شما عددی حسابی است.
بازه (۰, ۱)	✓		هر بازه زیرمجموعه‌ای از عددهای حقیقی است و بی‌شمار عضو دارد.

نکته برای اینکه ثابت کنیم یک مجموعه نامتناهی است، کافی است دست کم یک زیرمجموعه نامتناهی از آن مثال بزنیم.

مثلاً مجموعه $\mathbb{Q}$ یک مجموعه نامتناهی است؛ زیرا $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ مجموعه‌ای نامتناهی است و $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

مثلاً بازه (۰, ۱) نامتناهی است؛ زیرا مجموعه‌ای مانند $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ که نامتناهی است، زیرمجموعه آن است.

نکته اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود.

سوال اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشند، متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های $A \cup B$ و $B - A$ ، $A - B$ ، $A \cap B$ را مشخص کنید.

پاسخ $A \cap B \subseteq A$ است، پس $A \cap B$ متناهی است.
 $(A - B) \subseteq A$ و A متناهی است، پس $A - B$ نیز متناهی است.
 A مجموعه‌ای متناهی است و اگر تعداد متناهی از بی‌شمار عضو B را حذف کنیم، باز هم بی‌شمار عضو دیگر در $B - A$ می‌ماند. پس $B - A$ نامتناهی است.
 اگر B نامتناهی باشد، ممکن است زیرمجموعه‌ای از آن متناهی باشد، پس بهتر است برای اثبات نامتناهی بودن $B - A$ از اینکه $(B - A) \subseteq B$ استفاده نکنیم.
 $A \cup B$ شامل همه عضوهایی است که یا در A عضویت دارند یا در B یا در هر دو مجموعه. B نامتناهی است، پس $A \cup B$ هم نامتناهی است.

نمرین‌های امتحانی

۱ مجموعه‌های اعداد و بازه‌ها

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{2n+1} \mid n \in \mathbb{Z}, n \leq 2 \right\}$$

[قم - نمونه‌دولتی مودریه - دی ۱۳۰۰]

[فارس - مدرسه خمرانگان - دی ۱۳۰۰]

$$(A - B) \cap C$$

[توران - مدرسه کوشش - دی ۱۳۰۰]

درست ☐ نادرست ☐

درست ☐ نادرست ☐

درست ☐ نادرست ☐

درست ☐ نادرست ☐

درست ☐ نادرست ☐

درست ☐ نادرست ☐

درست ☐ نادرست ☐

درست ☐ نادرست ☐

الف) $\frac{\sqrt{2}}{4 - \sqrt{16}} \dots \mathbb{R}$

ب) $3 \dots (-\infty, 3)$

ث) $(-3, 3) \dots [-2, +\infty)$

ج) $\pi \dots (-\pi, 3/14)$

[قم - نمونه‌دولتی آیت‌الله بهاء‌الدینی (ره) - دی ۱۳۰۰]

ب) $\{1, 2\} \dots (0, 2]$

ت) $(-1, 3] \dots [-1, 4)$

ج) $-3\sqrt{2} \dots (-\sqrt{20}, \sqrt{19})$

ح) $\{3\} \dots (\frac{1}{3}, 3)$

۱۳ * تشریحی حاصل $A = ([-6, 4) \cap (-\infty, 1]) - [0, 2)$ را بیابید.

۱۴ حاصل عبارت $\{1, 2\} - [-2, +\infty)$ را به صورت یک بازه یا اجتماع از بازه‌ها بنویسید.

۱۵ اگر $a > 1$ ، حاصل $(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}) \cap (-\frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^2})$ را بنویسید.

۲ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱۶ * تشریحی مجموعه شامل همه زیرمجموعه‌های اعداد طبیعی متناهی است یا نامتناهی؟ توضیح دهید.

۱۷ * متناهی یا نامتناهی بودن هر مجموعه را مشخص کنید.

الف) شمارنده‌های صحیح عدد 100^{100}

ب) عددهای گنگ بین $0/2$ و $0/3$

ث) تعداد برگ‌های درختان آمازون در یک لحظه مشخص.

۱۸ به ازای کدام مقادیر a ، تساوی $\mathbb{R} = (-\infty, 1] \cup (\frac{3a-4}{2}, +\infty)$ برقرار است؟

۱۹ به هر مورد پاسخ کوتاه بدهید. (بله - خیر)

الف) آیا مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد که کوچک‌ترین عضو داشته باشد؟

ب) آیا مجموعه‌ای نامتناهی وجود دارد که کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عضو آن مشخص باشند؟

پ) اگر A مجموعه‌ای متناهی و B مجموعه‌ای نامتناهی باشند، آیا $B - A$ همیشه نامتناهی است؟

ت) اگر اشتراک دو مجموعه نامتناهی باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت هر دو مجموعه نامتناهی هستند؟

ث) آیا هر زیرمجموعه از یک مجموعه نامتناهی، مجموعه‌ای نامتناهی است؟

ج) اگر $A - B$ نامتناهی باشد، آیا $B - A$ نیز نامتناهی است؟

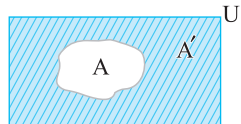


3 + متمم یک مجموعه

● مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

تعریف: در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با «U» نشان می‌دهیم. وقتی درباره دانش آموزان کلاس شما گفت‌وگو می‌کنیم، مجموعه مرجع کلاس شما است یا زمانی که درباره مجموعه‌های اعداد صحبت می‌کنیم، مجموعه اعداد حقیقی، مجموعه مرجع است.

مجموعه مرجع معمولاً در خود سؤال مشخص می‌شود و در نمودار ون با مستطیل مشخص می‌کنیم.



تعریف: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر A' شامل عضوایی از U است که در A نیستند.

سوال اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ مجموعه مرجع و $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = \{4, 6\}$ دو زیرمجموعه از آن باشند، مجموعه‌های A' ، B' ، $(A \cap B)'$ و $(A')'$ را با عضوهایشان نشان دهید.

پاسخ A' (متمم A) شامل همه عضوایی از U است که در A نیستند؛ بنابراین:
 $A' = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{1, 2, 4\} = \{3, 5, 6\}$
 B' (متمم B) شامل همه عضوایی از U است که در B نیستند؛ بنابراین:
 $B' = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{4, 6\} = \{1, 2, 3, 5\}$
 $(A')'$ (متمم A') شامل همه عضوایی از U است که در A' نیستند. با توجه به مفهوم مجموعه متمم، همان A است.
 $(A')' = U - A' = A = \{1, 2, 4\}$
 $(A \cap B)'$ شامل همه عضوایی از U است که در $A \cap B$ نیستند؛ بنابراین:
 $(A \cap B)' = U - (A \cap B)$
 $A \cap B = \{1, 2, 4\} \cap \{4, 6\} = \{4\}$
 $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{4\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$

نکته اگر مجموعه مرجع $\mathbb{R}$ فرض کنیم، می‌دانیم هر عددی که گویا نباشد، گنگ است. بنابراین اگر مجموعه اعداد گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان دهیم، مجموعه اعداد گنگ، متمم آن و $\mathbb{Q}'$ است.

$\mathbb{Q}$ (اعداد گویا)	$\mathbb{Q}'$ (اعداد گنگ)
------------------------------	------------------------------

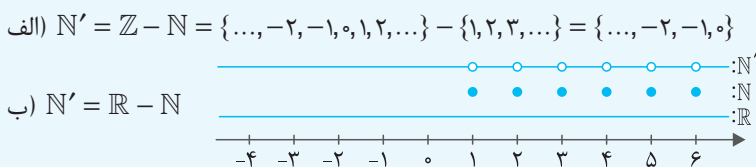
$\mathbb{R}$

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

کاردرکلاس [صفحه ۹ کتاب درسی]

الف) اگر $\mathbb{Z}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، آنگاه $\mathbb{N}'$ را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.
 ب) اگر $\mathbb{R}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم، در این صورت $\mathbb{N}'$ را روی محور نمایش دهید.

پاسخ



تمرین [صفحه ۱۲ کتاب درسی]

$\mathbb{N}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

پاسخ الف) اگر A را مجموعه اعداد طبیعی زوج در نظر بگیریم، A' مجموعه اعداد طبیعی فرد خواهد بود که آن هم یک مجموعه نامتناهی است.
 ب) اگر B را اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۳ در نظر بگیریم، B' برابر است با اعداد ۱ و ۲ که یک مجموعه متناهی است. $B = \{4, 5, 6, 7, \dots\} \Rightarrow B' = \{1, 2, 3\}$
 پ) اگر C را اعداد طبیعی یک رقمی در نظر بگیریم، آنگاه C' یک مجموعه نامتناهی می‌شود. $C = \{1, 2, \dots, 9\} \Rightarrow C' = \{10, 11, 12, \dots\}$

از تمرین بالا می‌توان نکته زیر را نتیجه گرفت:

نکته اگر مجموعه مرجع متناهی باشد، تمام مجموعه‌ها و متمم آن‌ها نیز متناهی‌اند. اگر مجموعه مرجع نامتناهی باشد و A زیرمجموعه آن باشد، داریم:
 A' ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد. $A \Rightarrow A'$ نامتناهی

سوال

فرض کنید $U = \mathbb{R}$, $A = (-1, 2]$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$, مجموعه‌های A' و B' را روی محور نشان دهید.

پاسخ

دقت کنید که بازه A شامل -1 نیست؛ پس متمم آن یعنی A' شامل -1 خواهد بود. همچنین A شامل 2 است، پس A' شامل 2 نیست. با توجه به شکل داریم:

$$A = (-1, 2] \Rightarrow A' = \mathbb{R} - A = (-\infty, -1] \cup (2, +\infty)$$

مجموعه B شامل اعداد حقیقی کوچک‌تر از 1 است (شامل خود 1 نیست)، بنابراین مجموعه B' شامل همه اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی 1 است (خود 1 را شامل می‌شود).

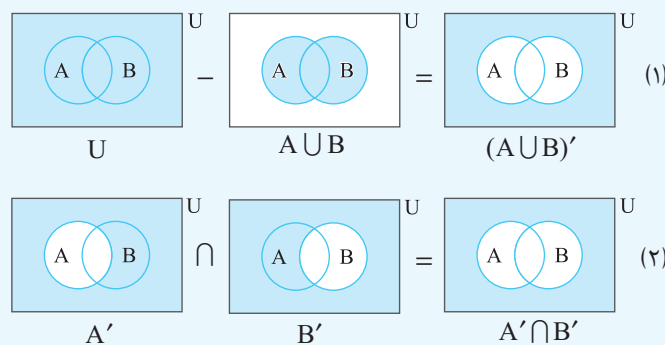


$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} = (-\infty, 1) \Rightarrow B' = \mathbb{R} - B = [1, +\infty)$$

سوال

با استفاده از نمودار ون نشان دهید: $(A \cup B)' = A' \cap B'$

پاسخ



$$(1), (2) \Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

• جبر مجموعه‌ها

با روشی مشابه آنچه در مسئله قبل بیان شد، می‌توان روابط مهمی بین متمم‌های مجموعه‌ها ساخت. هر چند که اثبات آن‌ها جزو اهداف سال دهم نیست؛ اما یادگیری و به ذهن سپردن آن‌ها به دلیل پرکاربرد بودنشان مهم است.

$$(A')' = A$$

۱- متمم متمم هر مجموعه برابر خود مجموعه است.

انگار بگویم قرینه قرینه هر عدد برابر خودش است.

$$U' = \emptyset$$

۲- متمم مجموعه تهی، تهی است.

$$\emptyset' = U$$

۳- متمم مجموعه تهی، مجموعه مرجع است.

$$A \cup A' = U$$

۴- اجتماع هر مجموعه با متمم آن، مجموعه مرجع است.

$$A \cap A' = \emptyset$$

۵- اشتراک هر مجموعه با متمم آن، تهی است.

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

۶- متمم اجتماع دو مجموعه با اشتراک متمم‌هایشان برابر است.

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

۷- متمم اشتراک دو مجموعه با اجتماع متمم‌هایشان برابر است.

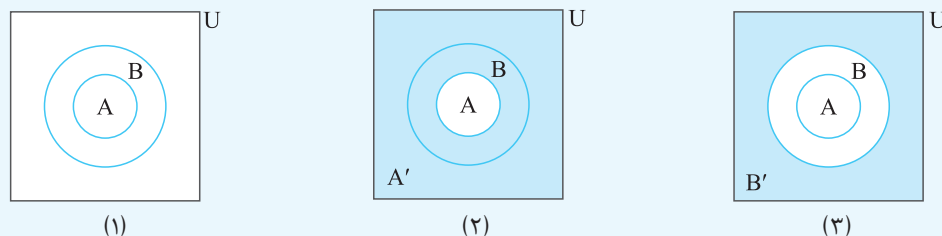
$$A - B = A \cap B'$$

۸- تفاضل B از A با اشتراک A و متمم B برابر است.

سوال

فرض کنیم $A \subseteq B \subseteq U$ که در آن U مجموعه مرجع است. تعیین کنید که آیا بین A' و B' هم رابطه زیرمجموعه بودن برقرار است؟ چگونه؟

پاسخ



$$A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$$

با توجه به قسمت‌های رنگی در شکل‌های (۲) و (۳) مشخص است که $B' \subseteq A'$ ، بنابراین:

سوال مجموعه $B' \cup (A - B)'$ با کدام گزینه برابر است؟

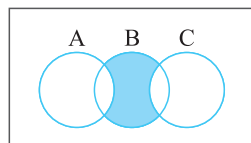
$A \cup B'$ (۴)

B' (۳)

U (۲)

$\emptyset$ (۱)

پاسخ گزینه «۲»
 $B' \cup (A - B)' = B' \cup (A \cap B')' = B' \cup (A' \cup B) = \underbrace{(B' \cup B)}_U \cup A' = U \cup A' = U$



سوال کدام مجموعه در نمودار ون مقابل، ناحیه رنگی را نشان می‌دهد؟

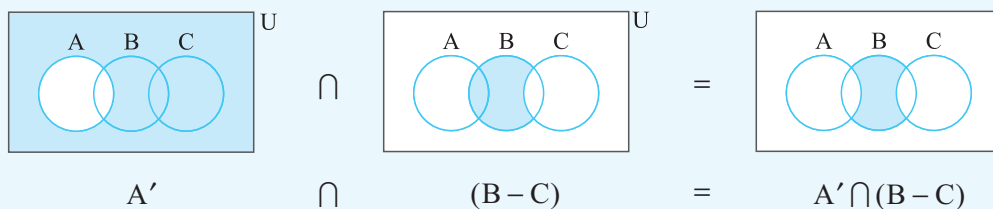
$A' - (B \cup C)$ (۲)

$A' \cap (B - C)$ (۱)

$A' - (B \cap C)$ (۴)

$A' - (B - C)$ (۳)

پاسخ گزینه «۱»



تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه (+۴)

یادآوری تعداد عضوهای یک مجموعه متناهی مانند A را با $n(A)$ یا |A| نشان می‌دهیم.

● **تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه**

منظور از $n(A \cup B)$ تعداد عضوهایی است که یا در A یا در B عضویت دارند. بنابراین اگر A و B عضو مشترکی نداشته باشند، می‌توان نوشت:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

تعریف: به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه **جدا از هم** یا **مجزا** می‌گوییم.

حال اگر دو مجموعه A و B مجزا نباشند و اشتراک داشته باشند، هنگام شمارش تعداد عضوهای $A \cup B$ باید مراقب باشیم که عضوهای مشترک را دوبار نشماریم. وقتی می‌نویسیم $n(A) + n(B)$ مقدار $n(A \cap B)$ را دو بار شمرده‌ایم، یک بار در $n(A)$ و یک بار در $n(B)$. بنابراین یک مرتبه $n(A \cap B)$ را باید کم کنیم. به طور کلی تعداد عضوهایی که در مجموعه A یا B هستند، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\underbrace{n(A \cup B)}_{\text{تعداد عضوهایی که یا در A هستند یا در B}} = \underbrace{n(A)}_{\text{تعداد عضوهای A}} + \underbrace{n(B)}_{\text{تعداد عضوهای B}} - \underbrace{n(A \cap B)}_{\text{تعداد عضوهای مشترک A و B}}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

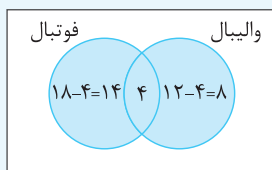
دقت کنید که اگر دو مجموعه مجزا باشند، $n(A \cap B) = n(\emptyset) = 0$ ، بنابراین:

تمرین [صفحه ۱۳ کتاب درسی]

اگر $n(A) = ۱۵$ ، $n(A \cap B) = ۵$ و $n(A \cup B) = ۳۰$ باشد، آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

پاسخ
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۳۰ = ۱۵ + n(B) - ۵ \Rightarrow n(B) = ۲۰$

سوال در یک کلاس ۴۰ نفری، ۱۲ نفر عضو تیم والیبال و ۱۸ نفر عضو تیم فوتبال و ۴ نفر عضو هر دو تیم هستند. چند نفر عضو تیم والیبال یا فوتبال هستند؟

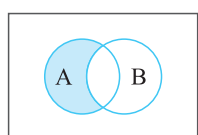


$$n(\text{فوتبال} \cup \text{والیبال}) = n(\text{فوتبال}) + n(\text{والیبال}) - n(\text{فوتبال} \cap \text{والیبال})$$

$$n(\text{فوتبال} \cup \text{والیبال}) = ۱۸ + ۱۲ - ۴ = ۲۶$$

برای درک بهتر سؤال می‌توان از نمودار ون هم استفاده کرد.

● **تعداد عضوهای تفاضل دو مجموعه**



نکته با توجه به نمودار مقابل، برای نوشتن عضوهای $A - B$ کافی است عضوهای مشترک A و B را از عضوهای A کم کنیم. حالا اگر بخواهیم تعداد عضوهای $A - B$ را بیابیم با توجه به توضیح داریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$



بدفهمی رایج گروهی از دانش‌آموزان به اشتباه می‌نویسند: $n(A - B) = n(A) - n(B)$

این کار به آن معناست که تعداد عضوهای B را که در A نیستند هم از تعداد عضوهای A کم شود!!!

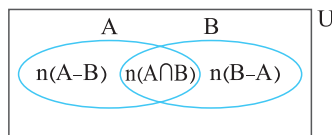
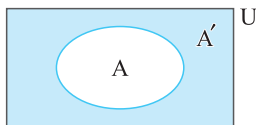
مثال: اگر $n(A) = 10$ ، $n(B) = 4$ و $n(A \cap B) = 1$ باشد، $n(A - B)$ را به‌درست آورید.

پاسخ: روش نادرست: $n(A - B) = n(A) - n(B) = 10 - 4 = 6$

روش درست: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 10 - 1 = 9$

با توجه به مفهوم تفاضل می‌توان رابطه‌ای برای تعیین تعداد عضوهای متمم یک مجموعه نوشت:

$$n(A') = n(U) - n(A)$$



$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

نکته

سوال اگر $n(A - B) = 10$ و $n(B - A) = 30$ و $n(A \cup B) = 60$ ، مقدار $n(A)$ را حساب کنید.

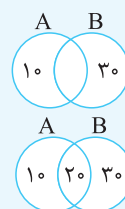
پاسخ

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

$$60 = 10 + 30 + n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 20$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$10 = n(A) - 20 \Rightarrow n(A) = 30$$



تمرین [صفحه ۱۳ کتاب درسی]

در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای، مشخص شد که ۷۰ نفر آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:

الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.

پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.

پاسخ مجموعه خریداران از شرکت A را با A و مجموعه خریداران از شرکت B را با B و مجموعه همه کسانی که در این نظرسنجی شرکت کرده‌اند

$$n(A) = 70, n(B) = 57, n(A \cap B) = 32, n(U) = 110$$

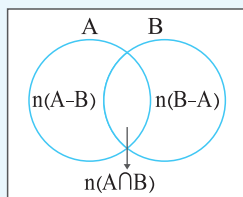
با U نشان می‌دهیم. پس داریم:

الف) باید تعداد کسانی را پیدا کنیم که یا از A خرید کرده‌اند یا از B؛ یعنی $n(A \cup B)$.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 70 + 57 - 32 = 95 \text{ نفر}$$

ب) تعداد کسانی که فقط از شرکت A خرید کرده‌اند، با $n(A - B)$ نشان می‌دهیم.

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 70 - 32 = 38 \text{ نفر}$$



پ) باید تعداد کسانی را پیدا کنیم که یا فقط از شرکت A، یا فقط از شرکت B خرید کرده‌اند. به عبارت دیگر از میان

خریداران A یا B کسانی که از هر دو شرکت خرید کرده‌اند را کنار می‌گذاریم. پس داریم: (استفاده از نمودار ون به

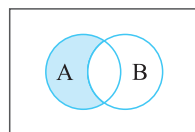
درک بهتر این قسمت کمک می‌کند.)

$$n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B) = 95 - 32 = 63 \text{ نفر}$$

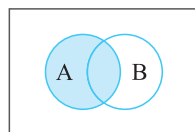
ت) مجموعه کسانی که نه از A خرید کرده‌اند نه از B را با $(A \cup B)'$ نشان می‌دهیم. نفر $n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 110 - 95 = 15$

نکته $A - B = A \cap B'$

به کمک نمودار ون می‌توان درستی تساوی فوق را نشان داد:

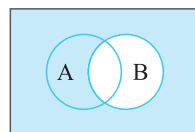


$A - B$



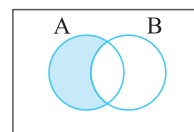
A

$\cap$



B'

$=$



$A \cap B'$