



نظریه اعداد یکی از مهم‌ترین مباحث درس ریاضیات گسسته است. با توجه به تنوع بالای سؤالات این فصل برای یادگیری بهتر نیاز به تکرار و تمرین بسیار زیادی وجود دارد. ابتدا به حل مسائل تشریحی بپردازید و پس از آن به سراغ سؤالات چهارگزینه‌ای بروید و هر چند یکبار با حل تمرین به مرور مباحث گذشته بپردازید. چرا که مطالب فرار است و در صورتی که مطالب را دوره نکند از یادتان خواهد رفت. از طرفی حل تمرین‌های دوره‌ای باعث می‌شود که برای حل هر مسئله چندین روش به ذهن شما خطور کند. مبحث هم‌نهشتی در این فصل از اهمیت زیادی برخوردار است و در آزمون سراسری و امتحان نهایی حتماً از این قسمت سؤال خواهید داشت. همچنین سؤال‌های زیر را حتماً مطالعه کنید.

- مثال صفحه ۷
- تمرین‌های ۱، ۳، ۵ و ۶ صفحه ۸ کتاب درسی
- کار در کلاس صفحه ۱۱
- تمرین‌های ۲، ۴، ۶، ۹ و ۱۱ صفحه ۱۶
- تمرین‌های ۱۲ تا ۱۴ صفحه ۱۶
- مسئله ۳ صفحه ۱۵
- فعالیت صفحه ۲۴
- مثال صفحه ۲۱
- تمرین‌های ۱، ۴، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸ و ۱۹ صفحه ۲۰ و ۲۹
- مثال صفحه ۲۸
- مثال صفحه ۲۷

مفاهیم کلیدی



آزمون تشخیصی مفاهیم کلیدی

۲۲ برای اثبات نادرستی گزاره‌های زیر مثال نقض ارائه کنید.

الف) باقی‌مانده تقسیم 2^n بر عدد ۷ همیشه مربع کامل است.

ب) اگر n عددی طبیعی باشد، عدد $2n^2 + 2n + 1$ همواره عددی اول است.

ج) اگر X و Y اعدادی گویا باشند، حاصل X^Y همواره عددی گویا است.

۲۳ جاهای خالی را با عبارت‌های درست پر کنید.

الف) مجموع سه عدد صحیح متوالی همواره بر بخش‌پذیر است.

ب) تفاضل مکعبات دو عدد متوالی همواره عددی است.

ج) مربع هر عدد طبیعی فرد را می‌توان به صورت نوشت.

- ۳۳ ثابت کنید مربع هر عدد صحیح را می‌توان به یکی از صورت‌های $4k$ و $4k+1$ نوشت.
- ۳۵ ثابت کنید که اگر n^2 بر ۵ بخش پذیر باشد، آنگاه n نیز بر ۵ بخش پذیر است.
- ۳۶ برای اثبات درستی گزاره $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ به روش اثبات بازگشتی به کدام رابطه همواره درست می‌رسیم؟
- ۳۷ به ازای کدام مقادیر صحیح a رابطه $3a+2 \mid 5a+7$ برقرار است؟
- ۳۸ چند نقطه با مختصات صحیح بر روی منحنی $3xy - y + 2x - 1 = 0$ قرار دارد؟
- ۳۹ بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک دو عدد n^2+7 و $n+2$ به ازای اعداد طبیعی n چند است؟
- ۴۰ حاصل $[(4a^2, 8a^2), (2a, 24a^2)]$ را بیابید (با فرض $a > 0$).
- ۴۱ باقی‌مانده تقسیم عددی بر ۹ برابر ۵ و بر ۱۳ برابر ۷ است. باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۳۹ چند است؟
- ۴۲ اگر مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \delta k\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = \delta k - 1\}$ و مجموعه C مجموعه $\mathbb{Z}$ را افزاز کرده باشند، رابطه کلی اعدادی که در C قرار می‌گیرند به چه صورت است؟
- ۴۳.۱ باقی‌مانده تقسیم عدد 19^{11} بر عدد ۲۱ چند است؟
- ۴۳.۲ اگر عدد $5xyy6$ بر ۹۹ بخش پذیر باشد، مقدار y چند است؟
- ۴۳.۳ اگر ۱۲ فروردین سالی چهارشنبه باشد، اول مهر همان سال چه روزی از هفته است؟
- ۴۴ جواب عمومی معادله $13x \equiv 11$ به کدام صورت است؟
- ۴۵.۱ به چند طریق می‌توان ۴۲۰۰۰ تومان را با اسکناس‌های ۲۰۰۰ تومانی و ۵۰۰۰ تومانی پرداخت کرد؟
- ۴۵.۲ جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $3x + 5y = 74$ را به دست آورید.

پاسخ

- ۳۳) الف) $n=7$ ب) $n=5$
- ۳۵) الف) ۳ ب) فرد
- ۳۶) به اولین سوال کد ۳۶ در درسنامه مراجعه شود. ۳۷) $a=-1, a=2$ ۳۸) یک نقطه
- ۳۹) $d=1, 2, 4, 8, 16$ ۴۰) $[8a^2, 2a] = 8a^2$
- ۴۱) $r=20$ ۴۲) $x = \delta k + 1, x = \delta k + 2, x = \delta k + 3$
- ۴۳.۱) $r=13$ ۴۳.۲) $y=8$ ۴۳.۳) $y=8$
- ۴۴) $x=9k+5$ ۴۵.۱) $r=13$ ۴۵.۲) چهارشنبه
- ۴۵.۳) ۵ طریق

درس اول: استدلال ریاضی



۱۴۰۲

حد اکثر زمان مطالعه: ۶ دقیقه

مفاهیم آموزشی

۳۷ مثال نقض

استدلال به معنای دلیل و برهان آوردن است. بشر بعد از این‌که به زندگی کشاورزی روی آورد، همواره برای درک بهتر پیرامون خود به استدلال نیاز داشته و در کنار استدلال از عقل خود کمک گرفته و پدیده‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کند. در این درس به بررسی انواع استدلال در ریاضیات می‌پردازیم که عبارت‌اند از:

به مثالی که کلیت یک حکم را رد می‌کند، **مثال نقض** گفته می‌شود. وقتی از مثال نقض استفاده می‌کنیم، در جستجوی یک مثال هستیم که درستی حکم را نقض می‌کند یعنی با آوردن یک مثال نقض ثابت می‌کنیم که حکم مسئله همواره برقرار نیست.

به طور مثال ادعا می‌کنیم که «حاصل ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.» برای رد این ادعا دو عدد گنگ $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$ را معرفی می‌کنیم و آنها را در یکدیگر ضرب می‌کنیم و می‌بینیم که حاصل عددی گویا است، پس حکم نقض می‌شود.

$$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x \times y = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) \xrightarrow{\text{اعداد مزدوج}} 1 - 2 = -1$$

$$y = 1 - \sqrt{2}$$

کله بعضی از مثال نقض‌های مهم به شرح زیر است:

$$\text{اعداد گنگ} \nsubseteq \text{اعداد گویا} \xrightarrow{\text{مثال نقض}} \begin{cases} \sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} + 1 \\ (\sqrt{2} + 1) + (-\sqrt{2} + 1) = 2 \in \text{اعداد گویا} \end{cases}$$

اعداد گنگ = مجموع دو عدد گنگ

$$\text{اعداد گنگ} \nsubseteq \text{اعداد گویا} \xrightarrow{\text{مثال نقض}} \begin{cases} \sqrt{2} = \text{عدد گنگ}, 0 = \text{عدد گویا} \\ 0 \times \sqrt{2} = 0 \in \text{اعداد گویا} \end{cases}$$

اعداد گنگ = عدد گنگ $\times$ عدد گویا

$$\begin{aligned} \text{عدد گنگ} = \sqrt{2}, \sqrt{2} &= \text{عدد گنگ}, (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = \text{عدد گنگ} \xrightarrow{\text{مثال نقض}} \text{عدد گنگ} = \text{عدد گنگ} = \text{عدد گنگ (عدد گنگ)} \\ \text{عدد گنگ} \neq \text{عدد گویا} = 2 &= (\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2 \\ \text{عدد گویا} = 0, \sqrt{2} &= \text{عدد گنگ} \xrightarrow{\text{مثال نقض}} \text{عدد گنگ} = \text{عدد گویا (عدد گنگ)} \\ \text{عدد گنگ} = \text{عدد گویا} = 1 &= (\sqrt{2})^0 \end{aligned}$$

مفاهیم کلیدی

۳۳ اثبات مستقیم

نتیجه‌گیری بر اساس اصولی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم را **اثبات مستقیم** می‌گوییم. به طور مثال پذیرفته‌ایم که اعداد زوج به صورت $2k$ و اعداد فرد به صورت $2k+1$ نوشته می‌شوند ($k \in \mathbb{Z}$) و یا همین دو اصل می‌توان بسیاری از روابط ریاضی را ثابت کرد.

کارد رگلکلاس [ص ۲] ثابت کنید که مجموع دو عدد فرد همیشه زوج است.

$$\begin{aligned} \text{پاسخ} \\ \begin{cases} x = 2k+1 \text{ عدد فرد} \\ y = 2k'+1 \text{ عدد فرد} \end{cases} \Rightarrow x+y = (2k+1) + (2k'+1) = 2k+2k'+2 = 2(k+k'+1) = 2q \\ (k, k' \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

سوال ثابت کنید حاصل ضرب دو عدد فرد همیشه فرد است.

$$\begin{aligned} \text{پاسخ} \\ \begin{cases} x = 2k+1 \text{ عدد فرد} \\ y = 2k'+1 \text{ عدد فرد} \end{cases} \Rightarrow x \times y = (2k+1)(2k'+1) = \underbrace{2kk'}_{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} + \underbrace{2k+2k'+1}_{q} = 2(2kk'+k+k') + 1 = 2q+1 \end{aligned}$$

تمرین [ص ۸] ثابت کنید که مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

$$\begin{aligned} \text{پاسخ} \\ x = 2k+1 \text{ عدد فرد} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow x^2 = \underbrace{4k^2}_{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} + 4k + 1 \\ \Rightarrow x^2 = 2(2k^2+2k) + 1 \Rightarrow x^2 = 2q+1 \text{ عدد فرد} \\ x = 2k+1 \text{ عدد فرد} \xrightarrow{\text{به توان ۳}} x^3 = (2k+1)^3 \xrightarrow{\text{اتحاد}} x^3 = \underbrace{8k^3+12k^2+6k+1}_{\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}} \\ \Rightarrow x^3 = 2(4k^3+6k^2+3k) + 1 = 2q'+1 \text{ عدد فرد} \end{aligned}$$

سوال ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $4q+3$ ، به صورت $4k+1$ است.

$$\begin{aligned} \text{پاسخ} \\ \begin{cases} x = 4q+3 \\ y = 4q'+3 \end{cases} \Rightarrow x \times y = (4q+3)(4q'+3) = 16qq' + 12q + 12q' + 9 \\ \text{عدد ۹ را به صورت ۸+۱ می‌نویسیم و از همه عبارت‌های قبل از ۴ فاکتور می‌گیریم:} \\ x \times y = 4(4qq' + 3q + 3q' + 2) + 1 \Rightarrow x \times y = 4k+1 \end{aligned}$$

پس ثابت شد حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $4q+3$ ، به صورت $4k+1$ است.

سوال ثابت کنید که مجموع سه عدد فرد متوالی همواره بر ۳ بخش پذیر است.

$$\begin{aligned} \text{پاسخ} \\ \begin{cases} x = 2k+1 \\ y = 2k+3 \\ z = 2k+5 \end{cases} \Rightarrow x+y+z = (2k+1) + (2k+3) + (2k+5) = 6k+9 \Rightarrow = 3(\underbrace{2k+3}_q) = 3q \text{ (بخش پذیر بر ۳)} \\ \text{عدد گویا} = \frac{1}{2}, \text{ عدد گویا} = 2 \xrightarrow{\text{مثال نقض}} \text{عدد گویا} = \text{عدد گویا (عدد گویا)} \\ \text{عدد گویا} \neq \text{عدد گنگ} = \sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

سوال ثابت کنید که اگر n^2 بر ۳ بخش پذیر باشد، آنگاه n نیز بر ۳ بخش پذیر است.

پاسخ

فرض خلف: $n \neq 3k$

حکم مسئله: $n = 3k$

فرض مسئله: $n^2 = 3k'$

اگر عددی بر ۳ بخش پذیر نباشد، می توان آن را به صورت $3k+1$ یا $3k+2$ نوشت:

$$n^2 \text{ بر } 3 \text{ بخش پذیر نیست.} \quad n = 3k+1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} n^2 = \underbrace{9k^2 + 6k + 1}_{\text{از } 3 \text{ فاکتور می گیریم}} \Rightarrow n^2 = 3(\underbrace{3k^2 + 2k}_{q}) + 1 \Rightarrow n^2 = 3q + 1$$

$$n^2 \text{ بر } 3 \text{ بخش پذیر نیست.} \quad n = 3k+2 \xrightarrow{\text{به توان } 2} n^2 = \underbrace{9k^2 + 12k + 4}_{\text{از } 3 \text{ فاکتور می گیریم}} \Rightarrow n^2 = 3(\underbrace{3k^2 + 4k + 1}_{q'}) + 1 \Rightarrow n^2 = 3q' + 1$$

در هر دو حالت به یک تناقض می رسیم، زیرا در فرض مسئله $n^2 = 3k'$ است، در صورتی که در اینجا $n^2 = 3k' + 1$ است. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت می شود.

سوال ثابت کنید که $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

پاسخ

فرض خلف: $\sqrt{2} \notin Q' \Rightarrow \sqrt{2} \in Q$

حکم مسئله: $\sqrt{2} \in Q'$

$$\sqrt{2} \in Q \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b}, (a, b) = 1, b \neq 0 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \xrightarrow[\text{بر } 2 \text{ بخش پذیر است}]{\text{با توجه به مثال قبل}} a = 2k \quad (I)$$

$$a^2 = 2b^2 \xrightarrow{a=2k} (2k)^2 = 2b^2 \Rightarrow 4k^2 = 2b^2 \xrightarrow{+2} 2k^2 = b^2 \xrightarrow[\text{بر } 2 \text{ بخش پذیر است}]{\text{با توجه به مثال قبل}} b = 2k' \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} (a, b) = 2 \neq 1$$

این یک تناقض است، زیرا باید $(a, b) = 1$ باشد، پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

سوال می دانیم که $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. ثابت کنید $\sqrt{\sqrt{2}+1}$ نیز عددی گنگ است.

پاسخ

فرض خلف: $\sqrt{\sqrt{2}+1} \in Q$

حکم مسئله: $\sqrt{\sqrt{2}+1} \in Q'$

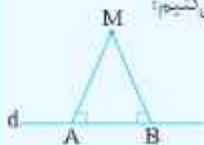
$$\sqrt{\sqrt{2}+1} \in Q \Rightarrow \sqrt{\sqrt{2}+1} = \frac{a}{b}, (a, b) = 1, b \neq 0 \xrightarrow{\text{به توان } 2} \sqrt{2}+1 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

این یک تناقض است، زیرا طبق فرض $\sqrt{2}$ عددی گنگ است و $\frac{a^2 - b^2}{b^2}$ عددی گویا است و یک عدد گنگ هیچ گاه با عدد گویا برابر نیست، پس فرض خلف باطل بوده و حکم ثابت می شود.

سوال ثابت کنید از یک نقطه خارج یک خط در یک صفحه، فقط یک خط می توان بر خط مفروض عمود کرد.

پاسخ

فرض می کنیم خط d مفروض باشد و نقطه M خارج این خط باشد، از نقطه M دو خط بر خط d عمود رسم می کنیم:



می دانیم مجموع زوایای مثلث AMB برابر 180° است، در این صورت:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{M} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ + 90^\circ + \hat{M} = 180^\circ \Rightarrow \hat{M} = 0$$

این یک تناقض است، زیرا در مثلث، زاویه $\hat{M}$ نمی تواند برابر صفر باشد. پس فرض خلف باطل است و ثابت می شود که از یک نقطه خارج یک خط فقط یک خط می توان بر خط مفروض عمود کرد.

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

سوال ثابت کنید که رابطه زیر به ازای تمام اعداد حقیقی برقرار است:

پاسخ از آنجایی که هدف، رسیدن به یک رابطه همواره درست است و معمولاً باید سعی کنیم شرایط ایجاد یک اتحاد را فراهم کنیم با کمی دقت متوجه می‌شویم که اگر طرفین رابطه را در عدد ۲ ضرب کنیم، به راحتی می‌توانیم اتحاد $(a \pm b)^2$ را ایجاد کنیم:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y$$

انتقال به طرف چپ

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 + y^2 + y^2 + 1 + 1 - 2xy - 2x - 2y \geq 0$$

دسته‌بندی

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0 \text{ همواره درست}$$

مفاهیم کلیدی

تمرین‌های امتحانی

- (الف)** درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.
۱. برای هر عدد حقیقی x و y داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$
 ۲. اگر k حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $k+1$ مربع کامل است.
 ۳. اگر x و y اعداد طبیعی متوالی باشند، $x^2 - y^2$ عددی زوج است.
 ۴. اگر x مضرب ۳ باشد، $x(x-3)$ مضرب ۱۸ است.

نادرست



درست



[توران - هیئت امنانی شهید مطهری - دی ۱۴۰۰]



[توران - هیئت امنانی شهید مطهری - دی ۱۴۰۰]



[تهران - فارغ ۹۹]



- (ب)** جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
۵. حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی است.
 ۶. در اثبات گزاره «اگر a_1, a_2 و a_3 عددهایی صحیح و b_1, b_2 و b_3 همان اعداد اولی به ترتیب دیگری قرار گرفته باشند، آنگاه $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است»، از روش استفاده می‌کنیم.

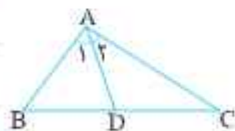
[زنگنه - مدرسه خورشیدان ۱۳۹۹]

- (ج)** به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۷. اگر α و β دو عدد گنگ و $\alpha + \beta$ گویا باشد، $\alpha + 2\beta$ عددی است.
۸. اگر n عددی طبیعی باشد، $n^2 - 5n + 7$ عددی است.
۹. به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید:
۱۰. به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} \geq \frac{4}{\sqrt{x+y}}$$

۱۱. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که اگر n^2 عددی فرد باشد، آنگاه n نیز عددی فرد است.
۱۲. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید اگر x و y دو عدد حقیقی و $x + 4y^2 = 7$ و $x \neq 3$ آنگاه $y \neq -1$ است.
۱۳. فرض کنید AD بیمسار زاویه A در مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq CD$ ثابت کنید: $AB \neq AC$.



$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

۱۴. الف) اگر a, b, c و d اعدادی حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1} < 2\sqrt{a}$$

- ب) اگر بدانیم $a > 1$ ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 \geq a^2b + b^2a$$

۱۵. اگر a و b اعداد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 \geq a^2b + b^2a$$

۱۶. هر یک از گزاره‌های زیر را ثابت و یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی مضرب ۸ است.

ب) همیشه ارتفاع مثلث داخل آن قرار دارد.

۱۷. اگر a عددی زوج باشد، ثابت کنید $a(a^2 - 4)$ مضرب ۴۸ است.

۸۹. اگر m بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که $36 \equiv (10 - m)! \pmod{10}$ ، آنگاه باقی‌مانده تقسیم m^{123} بر ۱۵ کدام است؟ [کنکور ۱۳۰۰]

- ۱ (۱)
۴ (۳)
۶ (۴)
۲ (۲)

۹۰. میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی به صورت $\overline{aba}$ که مضرب ۱۲ باشد، کدام است؟ [کنکور ۱۳۰۰]

- ۳۴۸ (۱)
۵۷۰ (۳)
۵۷۴ (۴)
۵۴۰ (۲)

۹۱. در مجموعه اعداد طبیعی اگر $d = (3n^2 - 2n + 6, 3n + 5)$ و $d \neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟ [کنکور ۹۹، ۵، ۵]

- ۴۱ (۱)
۴۷ (۳)
۵۳ (۴)
۴۳ (۲)

۹۲. اگر عدد $2^n - 1$ بر عدد ۲۱۷ بخش پذیر باشد، تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟ [کنکور ۹۹]

- ۴ (۱)
۶ (۳)
۷ (۴)
۵ (۲)

۹۳. فرض کنید خارج قسمت و باقی‌مانده تقسیم عدد طبیعی سه‌رقمی m بر n به ترتیب ۲۹ و ۱۷ باشند، تعداد عددهای طبیعی m بخش پذیر بر ۵ کدام است؟ [کنکور ۹۹، ۵، ۵]

- ۳ (۱)
۵ (۳)
۶ (۴)
۴ (۲)

۹۴. چند عدد طبیعی مضرب ۹ وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم آن اعداد بر 430 یا مجذور خارج قسمت برابر باشد؟ [کنکور ۹۹]

- ۴ (۱)
۶ (۳)
۷ (۴)
۵ (۲)

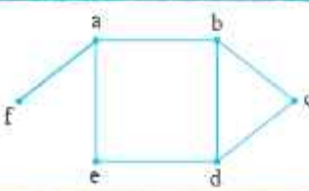
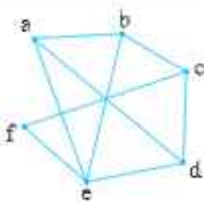
۹۵. به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$ اگر $\alpha \mid 13n + 2$ و $\alpha \mid 7n + 4$ باشد، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n کدام است؟ [کنکور ۹۸]

- ۷ (۱)
۹ (۳)
۱۰ (۴)
۸ (۲)

سؤال تمرین	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱
کد مفاهیم کلیدی	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲

سؤال تمرین	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹
کد مفاهیم کلیدی	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵

سؤالات امتحان نهایی: گسسته		آزمون شماره ۶	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	ساعت شروع:
نام و نام خانوادگی:		رشته ریاضی فیزیک	تعداد صفحه: ۲	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
شهریور ۱۴۰۰		مرکز سنجش و پایش کیفیت آموزشی		
ردیف	سؤالات پاسخنامه دارد.			
۱	ثابت کنید مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.			
۲	درستی یا نادرستی هر یک از گزاردهای زیر را تعیین کنید. الف) $3^9 2^5$ ب) اگر $a, b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$ در این صورت $ a \leq b $. پ) حاصل ضرب سه عدد صحیح متوالی بر $3!$ بخش پذیر است. ت) برای هر عدد صحیح m داریم $(2m + 1, 2m + 2) = 1$.			
۳	اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a بر ۲۸ را بیابید؟			
۴	کوتاه پاسخ دهید. الف) معادله هم نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ تحت چه شرایطی دارای جواب است؟ ب) عدد ۱۴۰۰ به کدام دسته هم نهشتی به پیمانه ۹ تعلق دارد؟			
۵	به چند طریق می توان یک کیسه ۲۳ کیلوگرمی را با وزنه های ۳ و ۵ کیلوگی وزن کرد؟			
۶	با استفاده از قوانین هم نهشتی، باقی مانده تقسیم عدد $A = 2985327$ را بر ۱۱ به دست آورید.			
۷	جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. الف) به رئسی که درجه آن صفر است یعنی هیچ بالی به آن متصل نباشد. رأس می گویند. ب) دو بال را می نامیم هرگاه رئسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها به آن متصل باشند. پ) مجموع درجات رئوس یک گراف برابر با است. ت) بیشترین تعداد بال در بین گراف های ساده متعلق به گراف است.			
۸	گراف G (شکل مقابل) را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) ماکزیمم و مینیمم درجه در گراف G را مشخص کنید. ب) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید. پ) دوری به طول ۳ برای رأس a بنویسید. ت) درجه رأس a در گراف مکمل G را به دست آورید.			
۹	نشان دهید گراف ۳- منتظم مرتبه ۷ وجود ندارد؟			
۱۰	عدد احاطه گری گراف شکل زیر را با بیان دلیل مشخص کنید.			



ردیف	سؤالات پاسخنامه دارد.	نمره
۱۱	اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ در این صورت چند رمز یاکد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشند؟	۱
۱۲	۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره اسکان داشته باشند؟	۱
۱۳	تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 13$ را به شرط $x_1 \geq 4$ و $x_6 > 2$ تعیین کنید.	۱/۵
۱۴	آیا دو مربع لاتین زیر متعامداند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$	۱
۱۵	می‌خواهیم برای یک ففل رمزی ۴ رقمی و فاقد صفر که حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ داشته باشد، تولید کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟	۱/۵
۱۶	حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟ (سال غیرکیسه در نظر بگیرید.)	۱
	جمع	۲۰

۳۵+ اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)

فرض می‌کنیم حکم نادرست است (فرض خلف). سپس با استفاده از روابط ریاضی و قوانین منطق گزاره‌ها به یک تناقض در فرض مسئله و یا یکی از اصول بنیادین در ریاضی می‌رسیم.

سوال ثابت کنید که اگر n^2 بر ۳ بخش پذیر باشد، آنگاه n نیز بر ۳ بخش پذیر است.

پاسخ
فرض مسئله: $n^2 = 3k'$
حکم مسئله: $n = 3k$
فرض خلف: $n \neq 3k$
اگر عددی بر ۳ بخش پذیر نباشد، می‌توان آن را به صورت $3k+1$ یا $3k+2$ نوشت:
$$n = 3k+1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} n^2 = \underbrace{9k^2 + 6k + 1}_{\text{از ۳ فاکتور می‌گیریم}} \Rightarrow n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \Rightarrow n^2 = 3q + 1$$

 n^2 بر ۳ بخش پذیر نیست.
$$n = 3k+2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} n^2 = \underbrace{9k^2 + 12k + 4}_{\text{بیا ۳+۱ از ۳ فاکتور می‌گیریم}} \Rightarrow n^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \Rightarrow n^2 = 3q' + 1$$

 n^2 بر ۳ بخش پذیر نیست.
در هر دو حالت به یک تناقض می‌رسیم، زیرا در فرض مسئله $n^2 = 3k'$ است، در صورتی که در اینجا $n^2 = 3k' + 1$ است. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود.

۳۶+ اثبات بازگشتی و گزاره‌های هم‌ارز

از حکم مسئله، عبارت را به کمک روش‌های جبری ساده می‌کنیم تا به یک رابطه همواره درست برسیم، حال اگر بتوانیم مراحل طی شده از رابطه همواره درست را به‌طور بازگشتی انجام دهیم و به حکم اولیه برسیم، می‌توانیم ادعا کنیم که حکم اولیه درست است.

سوال ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی x و y رابطه زیر همواره برقرار است.
$$x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$$

پاسخ
$$x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2x + 2y - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$$

همواره درست است.

۳۷ مفهوم و نماد عادی کردن در اعداد صحیح

عدد صحیح b را بر عدد صحیح $a \neq 0$ بخش‌پذیر گوییم هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به طوری که $b = aq$ و آن را با نماد $a | b$ نمایش می‌دهند.

فصل اول: آشنایی با نظریه اعداد

• انواع روش‌های استدلال

۳۲+ مثال نقض

به مثالی که کلیت یک حکم را رد می‌کند، مثال نقض گفته می‌شود.

ادعا: «حاصل ضرب دو عدد گنگ، عددی گنگ است.»

مثال نقض: عدد گویا $-1 = 1 - 2 = \frac{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{\text{گنگ} \cdot \text{گنگ}}$

۳۳+ اثبات مستقیم

نتیجه‌گیری بر اساس اصولی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم را اثبات مستقیم می‌گوییم.

سوال ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $4q+3$ ، به صورت $4k+1$ است.

پاسخ
$$\begin{cases} x = 4q+3 \\ y = 4q'+3 \end{cases} \Rightarrow x \times y = (4q+3)(4q'+3)$$

$$= 16qq' + 12q + 12q' + 9$$

عدد ۹ را به صورت $8+1$ می‌نویسیم و از همه عبارت‌های قبل از ۱ از ۴ فاکتور می‌گیریم:
$$x \times y = 4(4qq' + 3q + 3q' + 2) + 1 \Rightarrow x \times y = 4k + 1$$

پس ثابت شد حاصل ضرب هر دو عدد به صورت $4q+3$ ، به صورت $4k+1$ است.

۳۴ اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها (روش اشیاع)

برای اثبات یک حکم لازم است همه موارد ممکن در مسئله را در نظر بگیریم و به حکم برسیم. به این نوع اثبات، روش اشیاع یا اثبات با در نظر گرفتن همه حالت‌ها گفته می‌شود.

سوال ثابت کنید که هر عدد صحیح که مربع کامل باشد را می‌توان به صورت $4k$ یا $4k+1$ نوشت.

پاسخ برای اثبات این حکم، هر عدد صحیح را می‌توان به صورت $2k$ یا $2k+1$ در نظر گرفت. سپس با به توان رساندن این اعداد به این نتیجه رسید که حاصل، به صورت $4k$ و یا $4k+1$ است.
$$n = 2k \xrightarrow{\text{به توان ۲}} n^2 = 4k$$

$$n = 2k+1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} n^2 = (2k+1)^2$$

$$\Rightarrow n^2 = \underbrace{4k^2 + 4k}_{\text{از ۴ فاکتور می‌گیریم}} + 1 \Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 4k' + 1$$

پس نتیجه می‌گیریم اعدادی که مربع کامل هستند، به صورت $4k$ یا $4k+1$ نوشته می‌شوند.