فصل ۱: راهبردهای حل مسئله

- راهبردهای حل مسئله
  - راهبرد رسم شکل
    - ۱ حل مسئله با راهبرد رسم شکل
  - راهبرد الگوسازی
    - ۲ حل مسئله با راهبرد الگوسازی، یادآوری عددهای طبیعی
  - راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب
    - ۳ حل مسئله با راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب، معرفی عددهای حسابی
  - راهبرد الگویابی
    - ۴ حل مسئله با راهبرد الگویابی (الگوی عددی و هندسی)
  - راهبرد حدس و آزمایش
    - ۵ حل مسئله با راهبرد حدس و آزمایش
  - راهبرد زیرمسئله
    - ۶ حل مسئله با راهبرد زیرمسئله
  - راهبرد حل مسئلهٔ ساده‌تر
    - ۷ حل مسئله با راهبرد حل مسئلهٔ ساده‌تر (با تقریب و محدود کردن حالت‌ها)
  - راهبرد روش‌های نمادین
    - ۸ حل مسئله با راهبرد روش‌های نمادین
  - مرور راهبردها
    - ۹ حل مسئله با ترکیب چند راهبرد

مفاهیم آموزشی

برای حل یک مسئله از چه راهبردی (روشی) استفاده کنیم؟

برای حل یک مسئله، باید ابتدا آن را خوب بخوانیم و درک کنیم، سپس با توجّه به اطلاعات داده‌شده و خواستهٔ مسئله، یک راهبرد مناسب انتخاب و به کمک آن پاسخ مسئله را به‌دست آوریم.

در این فصل راهبردهای حل یک مسئله را که در مقطع دبستان به مرور یاد گرفته‌ایم، یادآوری می‌کنیم. دسته‌بندی این راهبردها به ما در انتخاب روش مناسب برای حل مسئله کمک می‌کند.

حل مسئله با راهبرد رسم شکل

۱ در برخی از مسئله‌ها، کشیدن یک شکل ساده کمک می‌کند تا مسئله را بهتر درک کنیم و آن را راحت‌تر حل کنیم.

مثال

۱ یک تابلو فرش مستطیلی شکل به طول ۲ متر و عرض ۱ متر روی دیوار طوری نصب شده است که از هر طرف دیوار، دو متر فاصله دارد. مساحت این دیوار را به‌دست آورید.

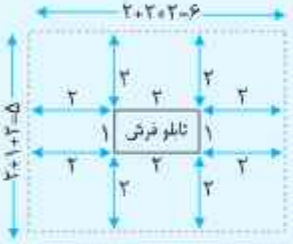
۲ ملخی می‌خواهد از دیواری به ارتفاع ۱۳ متر بالا برود. اگر او در هر جهش ۴ متر بالا برود و هر بار یک متر شر بخورد و پایین بیاید، در جهش چندم به بالای دیوار می‌رسد؟

۳ توپی را از ارتفاع ۶۴ متری سطح زمین رها می‌کنیم. اگر این توپ پس از هر بار زمین خوردن، ربع ارتفاع قبل خود بالا بیاید، از لحظهٔ رها شدن تا سومین مرتبه‌ای که به زمین می‌خورد چند متر را طی خواهد کرد؟

پاسخ ۱: با رسم یک شکل ساده، طول و عرض دیوار را مشخص می‌کنیم:

با توجه به شکل، مساحت دیوار با مساحت مستطیلی به طول ۶ و عرض ۵ برابر است. بنابراین:

مساحت دیوار = ۶ × ۵ = ۳۰ مترمربع



توجه کنید منظور از رسم شکل نقاشی نیست؛ کافی است برای مسئله یک شکل ساده بکشیم. گاهی ممکن است شکل را فقط تصور کنیم و آن را رسم نکنیم.

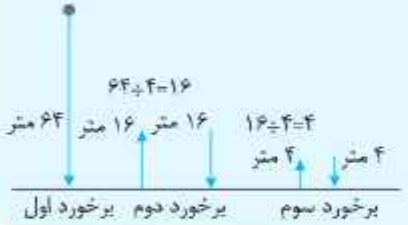
پاسخ ۲: یک محور رسم می‌کنیم و با مشخص کردن جهش‌های ملخ بر روی آن، پاسخ را به دست می‌آوریم:

با توجه به شکل، این ملخ با ۴ پرش به بالای دیوار می‌رسد.

توجه کنید ملخ در جهش چهارم به بالای دیوار می‌رسد و دیگر شر نمی‌خورد.

پاسخ ۳: با رسم کردن مسیرهای حرکت توپ و مشخص کردن اندازهٔ طول هر مسیر، به راحتی می‌توانیم مقدار مسافتی که از لحظهٔ رها شدن تا سومین برخورد به زمین طی می‌کند را به دست آوریم:

مسافت طی‌شده = ۶۴ + ۱۶ + ۱۶ + ۴ + ۴ = ۱۰۴ متر



حلّ مسئله با راهبرد الگوسازی، یادآوری عددهای طبیعی

۴ در برخی از مسئله‌ها، باید همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسیم تا بتوانیم پاسخ را پیدا کنیم. در چنین مسئله‌هایی برای آن‌که هیچ حالتی از قلم نیفتد، کافی است که آن‌ها را به‌ترتیب و با الگویی مشخص بنویسیم.

یادآوری عددهای ۱،۲،۳،... را عددهای طبیعی می‌نامیم.

نکته برای محاسبهٔ حاصل جمع اعداد طبیعی متوالی، می‌توانیم از فرمول مقابل استفاده کنیم:

$$۱+۲+۳+۴+\ldots+\bigcirc=\frac{\bigcirc\times(\bigcirc+۱)}{۲}$$

مثال

۱ دو عدد طبیعی پیدا کنید که حاصل ضرب آنها ۴۸ و حاصل جمع آنها کمترین مقدار ممکن باشد.

۲ با انگشتان یک دست به چند طریق می‌توانیم عدد ۳ را نشان دهیم؟

پاسخ ۱: برای پاسخ دادن به این سؤال باید ابتدا تمام اعدادی که حاصل ضرب آنها ۴۸ می‌شود را مشخص کنیم و سپس با محاسبهٔ حاصل جمع آنها، کمترین مقدار را پیدا کنیم. برای آنکه هیچ حالتی را از قلم نیندازیم، بهتر است این کار را با الگوسازی انجام دهیم؛ به این ترتیب که از کوچک‌ترین عدد طبیعی یعنی عدد ۱ شروع می‌کنیم و به ترتیب حالت‌ها را بررسی می‌کنیم:

با توجه به جدول، کوچک‌ترین حاصل‌جمع مربوط به دو عدد ۶ و ۱۸ است پس این دو عدد، پاسخ مسئله هستند.

۴۸=عدد دوم×عدد اول

عدد اول	عدد دوم	حاصل جمع
۱	۴۸	۱+۴۸=۴۹
۲	۲۴	۲+۲۴=۲۶
۳	۱۶	۳+۱۶=۱۹
۴	۱۲	۴+۱۲=۱۶
۶	۸	۶+۸=۱۴

پاسخ ۲: فرض کنید انگشتان دست را از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری کنیم و برای شمردن تمام حالت‌ها، کافی است هر بار (به‌ترتیب) دو تا از انگشت‌ها را ثابت نگه داریم و با تغییر دادن انگشت سوم، تمام حالت‌ها را مشخص کنیم.

انگشت اول	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۲	۲	۲	۳
انگشت دوم	۲	۲	۲	۳	۳	۴	۳	۳	۴	۴
انگشت سوم	۳	۴	۵	۴	۵	۵	۴	۵	۵	۵

با توجه به جدول، به ۱۰ طریق می‌توانیم با انگشتان یک دست عدد ۳ را نشان دهیم.

حل مسئله با راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب، معرفی عددهای حسابی

۳ در برخی از مسئله‌ها، نیاز است که تمام حالت‌های ممکن را بنویسیم و با حذف کردن حالت‌های نامطلوب، به پاسخ مسئله برسیم. در چنین مسئله‌هایی، برای آنکه تمام حالت‌ها را در نظر بگیریم، بهتر است از راهبرد الگوسازی هم استفاده کنیم.

به عددهای ۰,۱,۲,۳,۴,... **عددهای حسابی** می‌گوییم.

مثال

۱ حاصل‌ضرب سن ۳ برادر برابر با ۴۰ و مجموع سن آنها برابر با ۱۱ است. کوچک‌ترین برادر چند سال دارد؟ (سن برادرها متفاوت است.)

۲ با سه کارت که روی هریک از آنها یکی از عددهای ۵ و ۷ و ۸ نوشته شده است، چند عدد سه رقمی می‌توانیم بسازیم که در آنها یکان از دهگان بزرگ‌تر باشد؟

پاسخ ۱: ابتدا به کمک روش الگوسازی تمام حالت‌هایی که حاصل‌ضرب سه عدد برابر با ۴۰ می‌شود را مشخص می‌کنیم و سپس حالتی که مجموع اعداد برابر با ۱۱ می‌شود را به عنوان حالت مطلوب در نظر می‌گیریم:

۴۰=سن برادر بزرگ‌تر × سن برادر وسط × سن برادر کوچک‌تر

بررسی حالت‌ها	مجموع	سن برادر بزرگ‌تر	سن برادر وسط	سن برادر کوچک‌تر
نامطلوب	۲۳	۲۰	۲	۱
نامطلوب	۱۵	۱۰	۴	۱
نامطلوب	۱۴	۸	۵	۱
مطلوب	۱۱	۵	۴	۲

با توجه به جدول، سن برادر کوچک‌تر ۲ سال است.

پاسخ ۲: تمام اعداد سه رقمی را که با این سه کارت می‌توانیم بسازیم در نظر می‌گیریم و از بین آنها، اعدادی را که رقم یکان آن از دهگان بزرگ‌تر است را به عنوان حالت مطلوب انتخاب می‌کنیم:

بررسی حالت‌ها	یکان	دهگان	صدگان
مطلوب	۸	۷	۵
نامطلوب	۷	۸	۵
مطلوب	۸	۵	۷
نامطلوب	۵	۸	۷
مطلوب	۷	۵	۸
نامطلوب	۵	۷	۸

عددهای ۵۷۸، ۷۵۸ و ۸۵۷ عددهای موردنظر سؤال هستند.

حل مسئله با راهبرد الگویابی

۴ در برخی از مسئله‌ها، با الگوهای عددی یا هندسی روبه‌رو هستیم. در چنین مسئله‌هایی، با پیدا کردن رابطه و نظم موجود در الگو پاسخ را به‌دست می‌آوریم. این راهبرد در مسئله‌هایی کاربرد دارد که بین شکل‌ها یا عددها، الگو و رابطهٔ مشخصی وجود داشته باشد.

مثال

۱ سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید.

۳، ۶، ۱۲، ۲۴، ... ، ... ، ...

۳، ۷، ۱۱، ۱۵، ... ، ... ، ...

۴، ۷، ۱۳، ۲۵، ... ، ... ، ...

۵، ۷، ۱۱، ۱۹، ... ، ... ، ...

۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ...

۲ در الگوی عددی مقابل عدد ۲۰ اُم را پیدا کنید.

پاسخ ۱: هر یک از الگوها را با توجه به رابطهٔ بین اعداد، ادامه می‌دهیم:

۳ و ۶ و ۱۲ و ۲۴ و ۴۸ و ۹۶ و ۱۹۲ (×۲)

۳ و ۷ و ۱۱ و ۱۵ و ۱۹ و ۲۳ و ۲۷ (+۴)

۴ و ۷ و ۱۳ و ۲۵ و ۴۹ و ۹۷ و ۱۹۳ (×۲−۱)

۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۹ و ۳۵ و ۶۷ و ۱۳۱ (+۲، +۴، +۸، +۱۶، +۳۲، +۶۴ / ×۲)

پاسخ ۲: ابتدا رابطهٔ بین شمارهٔ هر جمله و عددی که در آن جمله قرار دارد را مشخص می‌کنیم و به کمک آن، عدد جملهٔ ۲۰ اُم را به‌دست می‌آوریم:

شمارهٔ جدول	۱	۲	۳	۴	...
عدد جمله	۵	۸	۱۱	۱۴	...
رابطه	۱×۳+۲	۲×۳+۲	۳×۳+۲	۴×۳+۲	...

در این الگو، عدد هر جمله از رابطهٔ «۲ + ۳ × شمارهٔ جمله» به‌دست می‌آید. بنابراین:

عدد ۲۰ اُم = ۲۰ × ۳ + ۲ = ۶۲

نکته در الگوهایی که اختلاف جمله‌های متوالی ثابت است، عدد هر جمله از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

(اختلاف − عدد اول) + (اختلاف × شمارهٔ جمله)

مثلاً در الگوی ... ، ۱۴ ، ۱۱ ، ۸ ، ۵، فاصلهٔ بین عددهای متوالی ۳ واحد است:

۵ و ۸ و ۱۱ و ۱۴ و ... (+۳)

بنابراین:

رابطه = (شمارهٔ جمله × ۳) + (۵ − ۳) = ۳ × شمارهٔ جمله + ۲

مثال

اگر شکل‌های مقابل را به همین ترتیب ادامه دهیم، چه کسری از شکل شمارهٔ (۱۲) رنگی می‌شود؟

(۱) (۲) (۳)

پاسخ: ابتدا رابطهٔ بین شمارهٔ هر شکل و کسری از آن شکل که رنگ شده است را مشخص می‌کنیم:

شمارهٔ جدول	۱	۲	۳	...
عدد جمله	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۳}{۷}$	...
رابطه	$\frac{۱}{۲×۱+۱}$	$\frac{۲}{۲×۲+۱}$	$\frac{۳}{۲×۳+۱}$	...

در این الگو، کسری که از هر شکل رنگ می‌شود از رابطهٔ «$\frac{\text{شمارهٔ شکل}}{۱ + \text{شمارهٔ شکل} \times ۲}$» به‌دست می‌آید.

بنابراین در شکل ۱۲، $\frac{۱۲}{۲۵}$ ($\frac{۱۲}{(۲×۱۲)+۱} = \frac{۱۲}{۲۵}$) از شکل رنگ می‌شود.

حل مسئله با راهبرد حدس و آزمایش

۵ در برخی از مسئله‌ها، ممکن است روش و راه‌حل مستقیمی وجود نداشته باشد یا راه رسیدن به جواب طولانی و دشوار باشد. در چنین مسئله‌هایی می‌توانیم با یک روش منطقی و منظم پاسخ احتمالی مسئله را حدس بزنیم؛ سپس با توجه به شرایط گفته‌شده در مسئله، حدس خود را بررسی کنیم و با توجه به نتیجهٔ به‌دست آمده حدس بعدی را بزنیم تا کم‌کم به پاسخ مسئله نزدیک شویم و در نهایت پاسخ سؤال را پیدا کنیم.

مثال

۱ دو زاویه متمم‌اند و یکی از زاویه‌ها ۴ برابر دیگری است. اندازهٔ زاویهٔ بزرگ‌تر را مشخص کنید.

۲ شکل‌های ○ و □، رقم‌های متفاوت ۱ تا ۹ را نشان می‌دهند. رقم مربوط به □ را در جمع مقابل مشخص کنید.

○
○
+□○
○□

پاسخ ۱: زاویهٔ کوچک‌تر را حدس می‌زنیم و با ۴ برابر کردن آن، زاویهٔ بزرگ‌تر را به‌دست می‌آوریم؛ با توجه به اینکه مجموع زاویهٔ متمم °۹۰ است، پاسخ مسئله را پیدا می‌کنیم:

نتیجه	بررسی و آزمایش	زاویهٔ بزرگ‌تر	زاویهٔ کوچک‌تر
عدد باید بزرگ‌تر شود.	$۱۰^\circ+۴۰^\circ=۵۰^\circ$	$۴\times۱۰^\circ=۴۰^\circ$	۱۰°
عدد باید بزرگ‌تر شود.	$۱۵^\circ+۶۰^\circ=۷۵^\circ$	$۴\times۱۵^\circ=۶۰^\circ$	۱۵°
عدد باید کوچک‌تر شود.	$۲۰^\circ+۸۰^\circ=۱۰۰^\circ$	$۴\times۲۰^\circ=۸۰^\circ$	۲۰°
عدد باید کوچک‌تر شود.	$۱۹^\circ+۷۶^\circ=۹۵^\circ$	$۴\times۱۹^\circ=۷۶^\circ$	۱۹°
درست است.	$۱۸^\circ+۷۲^\circ=۹۰^\circ$	$۴\times۱۸^\circ=۷۲^\circ$	۱۸°

زاویهٔ کوچک‌تر ۱۸° و زاویهٔ بزرگ‌تر ۷۲° است.

پاسخ ۲: به‌جای ○ و □، رقم‌های مختلف را حدس می‌زنیم و در عبارت قرار می‌دهیم تا جایی که رابطهٔ داده شده برقرار باشد. با توجه به اینکه یکان عددِ حاصل از جمع سه تا دایره برابر است با مربع، می‌توانیم با حدس زدن ○، مقدار □ را مشخص کنیم و سپس رابطه را بررسی کنیم:

بررسی و آزمایش					
	۱	۳	۶	۸	۹
	۱	۳	۶	۸	۹
	+۳۱	+۹۳	① +۸۶	① +۴۸	② +۷۹
	✗۳ ← باید ۱ باشد	✗۹ ← باید ۳ باشد	✗۸ ← باید ۶ باشد	✗۴ ← باید ۸ باشد	۹۲
□	۳	۹	۸	۴	۷
○	۱	۳	۶	۸	۹

در □ رقم ۷ و در ○ رقم ۹ قرار می‌گیرد.

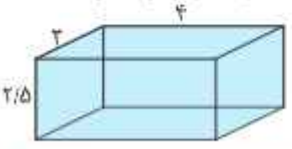
حل مسئله با راهبرد زیرمسئله

۶ در برخی از مسئله‌ها که پیچیده و چند مرحله‌ای هستند، بهتر است مسئله را به چند مسئلهٔ ساده‌تر (زیرمسئله) تبدیل کنیم و با حل مرحله به مرحلهٔ این زیر مسئله‌ها، به پاسخ مسئلهٔ اصلی برسیم.

مثال

۱ الینا با $\frac{۲}{۵}$ پول خود یک گلدان و با $\frac{۱}{۳}$ پولش، ۴۰ شاخه گل خرید. اگر ۲۴۰۰۰ تومان برای او باقی‌مانده باشد، پول الینا در ابتدا چند تومان بوده است؟

۲ طول، عرض و ارتفاع یک اتاق مستطیل شکل به ترتیب ۴، ۳ و ۲/۵ متر است. می‌خواهیم دیوارها و سقف این اتاق را رنگ کنیم. اگر برای هر مترمربع ۰/۴ کیلوگرم رنگ لازم باشد، به چند کیلوگرم رنگ نیاز داریم؟



پاسخ ۱: به کمک زیر مسئله‌های زیر به پاسخ سؤال می‌رسیم:

- الینا چه کسری از پولش را خرج کرده است؟

$$\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۳}=\frac{۶}{۱۵}+\frac{۵}{۱۵}=\frac{۱۱}{۱۵}$$

- چه کسری از پولش باقی مانده است؟

$$۱-\frac{۱۱}{۱۵}=\frac{۴}{۱۵}$$

• مقدار پول باقی‌مانده، ۲۴۰۰۰ تومان است. مقدار اولیهٔ پول الینا چقدر است؟ تومان $۱۵ \times ۶۰۰۰ = ۹۰۰۰۰$ = پول اولیهٔ الینا $\Rightarrow \frac{۴}{۱۵} = \frac{۲۴۰۰۰}{?}$ (×۶۰۰۰ و ÷۶۰۰۰)

برای استفاده از راهبرد زیرمسئله، ممکن است سؤال‌های متفاوتی انتخاب شود. مهم این است که سؤال‌ها مرحله به مرحله حل شوند و پاسخ هر سؤال به پاسخ سؤال بعدی کمک کند و با حل آخرین سؤال، به پاسخ مسئله برسیم.

در این راهبرد، نیازی نیست که حتماً سؤال‌ها را بنویسیم، کافی است با طرح سؤال‌ها در ذهنمان، به‌صورت مرحله به مرحله پاسخ‌ها را بنویسیم.

پاسخ ۲: (مساحت مستطیلی به طول ۳ و عرض ۲/۵) ×۲ + (مساحت مستطیلی به طول ۴ و عرض ۲/۵) ×۲ = مساحت دیوارها

$= ۲ \times (۴ \times ۲/۵) + ۲ \times (۳ \times ۲/۵) = ۲۰ + ۱۵ = ۳۵$ مترمربع

مساحت مستطیلی به طول ۴ و عرض ۳ = $۴ \times ۳ = ۱۲$ مترمربع

کل مساحتی که می‌خواهیم رنگ کنیم = $۳۵ + ۱۲ = ۴۷$ مترمربع

برای هر مترمربع ۰/۴ کیلوگرم رنگ لازم است پس: مقدار رنگ مورد نیاز = $۴۷ \times ۰/۴ = ۱۸/۸$ کیلوگرم

حل مسئله با راهبرد حل مسئلهٔ ساده‌تر

۷ در برخی از مسئله‌ها، بهتر است ابتدا یک یا چند مسئلهٔ ساده‌تر که با مسئلهٔ اصلی در ارتباط هستند را حل کنیم و سپس با توجه به پاسخ مسئله‌های ساده‌تر و با پیدا کردن یک الگوی مناسب بین پاسخ آنها، جواب مسئلهٔ اصلی را به‌دست آوریم.

مثال

۱ یک کارخانهٔ سیمان‌سازی، روزانه ۳۰۶/۲۵ کیلوگرم سیمان را به بلوک‌های بتنی تبدیل می‌کند. اگر هر بتن شامل ۸/۷۵ کیلوگرم سیمان باشد، در این کارخانه روزانه چند بلوک بتنی تولید می‌شود؟

۲ حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱}{۸۱} + \ldots + \frac{۱}{۶۵۶۱} =$$

پاسخ ۱: ابتدا مسئله را با عددهای ساده‌تر حل می‌کنیم. مثلاً با توجه به اینکه ۳۰۰ ≈ ۳۰۶/۲۵ و ۱۰ ≈ ۸/۷۵ مسئله را برای خودمان به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

«کارخانه‌ای روزانه ۳۰۰ کیلوگرم سیمان را به بلوک‌های بتنی تبدیل می‌کند و هر بتن شامل ۱۰ کیلوگرم سیمان است. بنابراین تعداد بتن‌ها در هر روز برابر است با:

$۳۰۰ \div ۱۰ = ۳۰$

با پیدا کردن راه حلِ مسئله، آن را با عددهای اصلی حل می‌کنیم: $۳۰۶/۲۵ \div ۸/۷۵ = ۳۵$

پاسخ ۲: ابتدا حاصل عبارت‌های ساده‌تر را می‌یابیم و با پیدا کردن الگویی بین حاصل جمع‌های به‌دست آمده، حاصل جمع عبارت اصلی را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{۱\times۳}{۳\times۳} + \frac{۱}{(۹)} = \frac{۳}{۹} + \frac{۱}{۹} = \frac{۴}{(۹)} \quad (۹-۱)\div۲$$

$$\frac{۱\times۹}{۳\times۹} + \frac{۱\times۳}{۹\times۳} + \frac{۱}{(۲۷)} = \frac{۹}{۲۷} + \frac{۳}{۲۷} + \frac{۱}{۲۷} = \frac{۱۳}{(۲۷)} \quad (۲۷-۱)\div۲$$

$$\frac{۱\times۲۷}{۳\times۲۷} + \frac{۱\times۹}{۹\times۹} + \frac{۱\times۳}{۲۷\times۳} + \frac{۱}{(۸۱)} = \frac{۲۷}{۸۱} + \frac{۹}{۸۱} + \frac{۳}{۸۱} + \frac{۱}{(۸۱)} = \frac{۴۰}{۸۱} \quad (۸۱-۱)\div۲$$

⋮

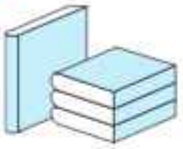
با توجه به حاصل‌جمع‌ها متوجه می‌شویم که پاسخ هر عبارت برابر با کسری است که مخرج آن با مخرج آخرین کسر برابر است و برای به‌دست آوردن صورت کسر، کافی است یک واحد از مخرج کم کنیم و عدد حاصل را بر ۲ تقسیم کنیم. بنابراین:

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱}{۸۱} + \cdots + \frac{۱}{(۶۵۶۱)} = \frac{۳۲۸۰}{(۶۵۶۱)} \quad (۶۵۶۱-۱)\div۲$$

حل مسئله با راهبرد روش‌های نمادین

۸ در برخی از مسئله‌ها، با قراردادن یک نماد هندسی به‌جای مقدار مجهول مسئله، می‌توانیم یک تساوی ریاضی مناسب با توجه به اطلاعات مسئله بنویسیم سپس با پیدا کردن عدد مناسب به جای آن نماد، به پاسخ سؤال برسیم.

مثال



❶ آرمیتا با ۵۵۰۰۰ تومان، ۴ کتاب یکسان برای هدیه دادن به دوستانش خرید. اگر ۵۰۰۰ تومان برایش باقی‌مانده باشد، قیمت هر کتاب چند تومان است؟

❷ اگر به سه برابر عددی، ۵ واحد اضافه کنیم، عدد ۲۹ به‌دست می‌آید. آن عدد را پیدا کنید.

❸ نیکان با یک تکه سیم، یک لوزی به ضلع ۱۲ سانتی‌متر ساخته است. اگر با همان سیم یک مستطیل به عرض ۹ سانتی‌متر بسازد، طول مستطیل او چند سانتی‌متر خواهد بود؟

پاسخ ۱: اگر قیمت هر کتاب برابر با □ تومان باشد، با توجه به اطلاعات مسئله می‌توانیم تساوی روبه‌رو را بنویسیم: $۴\times\square+۵۰۰۰=۵۵۰۰۰$

با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش، مقدار □ را پیدا می‌کنیم:

□	بررسی و آزمایش	نتیجه
۱۵۰۰۰	$۴\times۱۵۰۰۰+۵۰۰۰=۶۵۰۰۰$	عدد باید کوچک‌تر شود.
۱۲۰۰۰	$۴\times۱۲۰۰۰+۵۰۰۰=۵۳۰۰۰$	عدد باید بزرگ‌تر شود.
۱۳۰۰۰	$۴\times۱۳۰۰۰+۵۰۰۰=۵۷۰۰۰$	عدد باید کوچک‌تر شود.
۱۲۵۰۰	$۴\times۱۲۵۰۰+۵۰۰۰=۵۵۰۰۰$	درست است.

قیمت هر کتاب ۱۲۵۰۰ تومان است.

پاسخ ۲: فرض می‌کنیم عدد موردنظر برابر با ○ باشد، داریم:

$$\underbrace{۳\times\bigcirc}_{\text{۳ برابر عدد}}\quad\underbrace{+۵}_{\text{۵ واحد اضافه کنیم}}\quad=۲۹$$

○	بررسی و آزمایش	نتیجه
۵	$۳\times۵+۵=۲۰$	عدد باید بزرگ‌تر شود.
۷	$۳\times۷+۵=۲۶$	عدد باید بزرگ‌تر شود.
۹	$۳\times۹+۵=۳۲$	عدد باید کوچک‌تر شود.
۸	$۳\times۸+۵=۲۹$	درست است.

به کمک حدس و آزمایش مقدار ○ را به‌دست می‌آوریم:

عدد موردنظر، عدد ۸ است.

پاسخ ۳: طول سیم با محیط لوزی برابر است. بنابراین:

$$\text{طول سیم} = ۴\times۱۲ = ۴۸ \text{ سانتی‌متر}$$

چون نیکان با همان سیم، مستطیل را ساخته است پس محیط مستطیل نیز برابر با ۴۸ سانتی‌متر است.

اگر فرض کنیم طول مستطیل برابر با △ سانتی‌متر باشد، با توجه به رابطهٔ محیط مستطیل داریم:

$$\text{محیط مستطیل} = ۲\times۹+۲\times\triangle = ۴۸ \Rightarrow ۱۸+۲\times\triangle = ۴۸$$

به کمک حدس و آزمایش مقدار △ را به‌دست می‌آوریم:

△	بررسی و آزمایش	نتیجه
۱۲	$۱۸+۲\times۱۲=۴۲$	عدد باید بزرگ‌تر شود.
۱۴	$۱۸+۲\times۱۴=۴۶$	عدد باید بزرگ‌تر شود.
۱۶	$۱۸+۲\times۱۶=۵۰$	عدد باید کوچک‌تر شود.
۱۵	$۱۸+۲\times۱۵=۴۸$	درست است.

بنابراین طول مستطیل ۱۵ سانتی‌متر است.

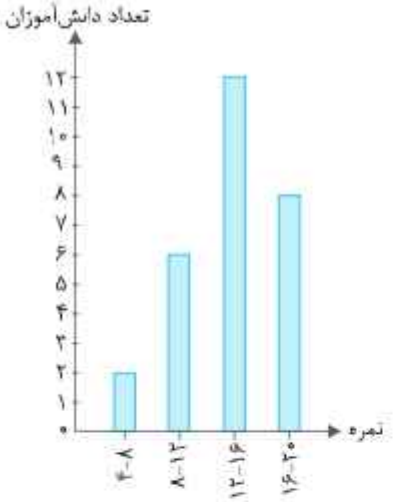
حلّ مسئله با ترکیب چند راهبرد

۹ در این بخش با نمونه سؤال‌های بیشتری آشنا می‌شویم و توانایی خود را در انتخاب راهبرد مناسب برای حل مسئله‌های مشابه، بالا می‌بریم. توجه داشته باشید:

- ممکن است در حل مسئله‌ای، راه جدیدی به ذهن شما برسد که با راهبردهای آموزش داده شده متفاوت باشد.
- ممکن است راهبرد انتخابی شما با راهبرد استفاده شده در این سؤال‌ها یکسان باشد اما شیوهٔ به‌کارگیری شما متفاوت باشد. (مثلاً ممکن است یک مسئله با راهبرد رسم شکل حل شود اما نحوهٔ شکل کشیدن‌ها متفاوت باشد.)
- ممکن است یک مسئله با چند راهبرد حل شود. انتخاب روشی که بتوانید سریع‌تر به پاسخ مسئله برسید، با شماست!

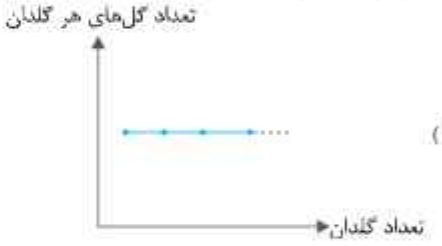
آزمون تستی

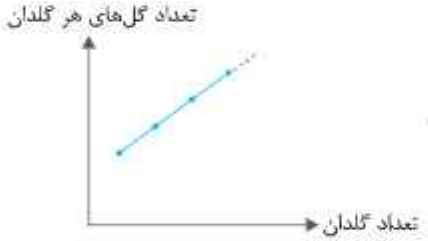
۱ نمودار مقابل مربوط به نمرات ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس است. اگر ۳ تا از دانش‌آموزان کلاس در آزمون شرکت نکرده باشند، تعداد کل دانش‌آموزان این کلاس چند نفر است؟

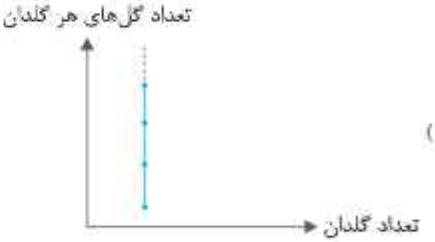


۱) ۳۵
۲) ۳۱
۳) ۲۸
۴) ۲۴

۲ می‌خواهیم تعدادی گل را در چند گلدان به طور مساوی قرار دهیم. کدام نمودار رابطهٔ بین تعداد گلدان‌ها و تعداد گل‌های هر گلدان را به درستی نشان می‌دهد؟ (تعداد گل‌ها ثابت است.)

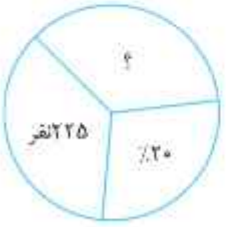
۱)


۲)


۳)


۴)

۳ نمودار دایره‌ای زیر، آمار ۵۰۰ ورزشکار قهرمان تنیس را در کشور آفریقای جنوبی در طول ۳ سال نشان می‌دهد. در سال ۲۰۰۳ چند درصد قهرمان تنیس بوده‌اند؟



۱) ٪۲۰
۲) ٪۱۵
۳) ٪۶۵
۴) ٪۳۵

۴ عقربهٔ چرخندهٔ زیر را ۴۸۰ بار می‌چرخانیم. انتظار داریم تقریباً چند بار عقربه روی رنگ آبی بایستد؟

۱) ۶۰
۲) ۱۲۰
۳) ۱۸۰
۴) ۲۴۰

۵ داخل جعبه‌ای ۶ کارت به شکل ⚀، ۳ کارت به شکل ⚁ و ۵ کارت به شکل ⚂ وجود دارد. اگر ۱ کارت ⚀، ۳ کارت ⚁ و ۴ کارت ⚂ را به کارت‌های قبلی اضافه کنیم، کدام گزینه صحیح خواهد بود؟

۱) احتمال انتخاب کارت ⚀ کم می‌شود.

۲) احتمال انتخاب کارت ⚁ کم می‌شود.

۳) احتمال انتخاب کارت ⚂ کم می‌شود.

۴) احتمال انتخاب هر سه تا کارت زیاد می‌شود.

۶ در یک کیسه ۵ مهرهٔ صورتی، ۱۴ مهرهٔ سبز و تعدادی مهرهٔ نارنجی وجود دارد. یک مهره به تصادف خارج می‌کنیم. اگر احتمال سبز بودن مهره $\frac{۲}{۳}$ باشد، تعداد مهره‌های نارنجی چند تا است؟

۱) ۲ ۲) ۴

۳) ۶ ۴) ۸

۷ می‌خواهیم با کارت‌های ۷ و ۵ و ۰ و ۳ یک عدد سه رقمی بسازیم. احتمال اینکه این عدد زوج باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

۸ کدام گزینه درست است؟

۱) احتمال اینکه در پرتاب تاس مضرب ۳ نیاید کمتر از این است که مضرب ۲ بیاید.

۲) درون یک کیسه با ۲ مهرهٔ سبز، ۲ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی احتمال اینکه مهرهٔ آبی نیاید، بیشتر از این است که مهرهٔ قرمز نیاید.

۳) احتمال اینکه در پرتاب سکه، رو یا پشت بیاید برابر است با اینکه در پرتاب تاس عدد کمتر از ۷ بیاید.

۴) احتمال اینکه در پرتاب سکه، رو بیاید بیشتر از این است که در پرتاب تاس عدد زوج بیاید.

۹ سه مهره که روی آنها به ترتیب اعداد ۱ و ۲ و ۳ نوشته شده است را درون کیسه‌ای قرار می‌دهیم. یکی از مهره‌ها را به تصادف بیرون می‌آوریم، عدد روی آن را یادداشت می‌کنیم و آن را دوباره به درون کیسه می‌اندازیم. این عمل را ۳ بار تکرار می‌کنیم. مجموع ۳ عدد یادداشت شده ۶ می‌شود. به فرض آنکه هر سه مهره در هر بار، شانس برابری برای انتخاب شدن داشته باشند، برای آنکه در هر سه بار مهره با عدد ۲ خارج شده باشد، چه احتمالی وجود دارد؟

۱) $\frac{۱}{۲۷}$

۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۷}$

۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۰ رمز یک کیف با ۲ رقم مشخّص می‌شود. احتمال اینکه شمارهٔ رمز این کیف عدد فرد بزرگ‌تر از ۵۰ باشد، چقدر است؟

۱) ۰/۱

۲) ۰/۲

۳) ۰/۵

۴) ۰/۲۵

سؤال آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
کد مفاهیم کلیدی	۹۶	۹۷	۹۹	۱۰۴	۱۰۳	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۲	۱۰۱	۱۰۱

مدت: ۷۰ دقیقه

آزمون خرداد ماه

۲۰ نمره

تهران - مدرسهٔ مهدوی - ۱۴۰۱

الف درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. (۱ نمره)

	درست	نادرست
۱- برداری که عرض آن صفر است، موازی محور عرض‌ها است.	☐	☐
۲- برای مقایسهٔ داده‌های تقریبی، نمودار میله‌ای مناسب است.	☐	☐
۳- حاصل عبارت $۲a^۲b - ۴ba^۲$ برابر با $-۲a^۲b$ است.	☐	☐
۴- منشور ۵ پهلو، ۱۰ رأس و ۱۵ یال دارد.	☐	☐

ب جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (۱)

۵- سطح‌های جانبی هر منشور به شکل ..... است.

۶- مقدار عددی عبارت $۲(-۳a + ۲b^۲)$ به ازای $a = ۲$ و $b = -۱$ برابر با ..... است.

۷- تاسی را ۱۴۰۰ بار پرتاب می‌کنیم. انتظار داریم تقریباً ..... بار عدد زوج بیاید.

۸- دهمین عدد در الگوی $\frac{۳}{۵}, \frac{۵}{۱۰}, \frac{۷}{۱۵}, \ldots$ عدد ..... است.

ج گزینهٔ مناسب را با علامت ✓ مشخص کنید. (۱)

۹- کدام دسته از اعداد زیر اول هستند؟

۱) ۱۷,۳,۹۱,۵ ۲) ۳۱,۱,۲۹,۴۳

۳) ۱۹,۲۳,۱۱,۲ ۴) ۱۱,۷,۵۱,۱۳

۱۰- مجموع سه عدد طبیعی فرد متوالی برابر با ۳۳ است. ثلث عدد کوچک‌ترکدام گزینه است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۱۱- حاصل عبارت $\frac{(۳۳,۱۸)}{|۱۲,۱۵|}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲۰}$

۳) $\frac{۱۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳۰}$

۱۲- حاصل عبارت $۴^۳ + ۴^۳ + ۴^۳ + ۴^۳$ کدام است؟

۱) $۴^{۱۲}$ ۲) $۴^۵$

۳) $۲^۶$ ۴) $۲^۸$

د به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱۳- حاصل ضرب مقابل را به کمک محور به‌دست آورید. (۰/۵)

$۴ \times (-۲) =$

۱۴- در شکل زیر $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$. جاهای خالی را کامل کنید. (۰/۵)

$\overline{AC} + \overline{CE} =$ .....

$\overline{AF} =$ ..... $\overline{DF}$

۱۵- حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید. (۱)

$۲^۳ - ۲ \times ۴ + ((-۱)^۲ - ۲) =$ .....

$\sqrt{\frac{۲۵}{۴۹}} =$ .....

۱۶- حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید. (۰/۵)

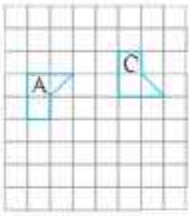
$-۴-۱۸\div۲+۴\times(-۴)=$

۱۷- در کیسه‌ای ۸ مهرهٔ سفید، ۴ مهرهٔ آبی و ۳ مهرهٔ سیاه وجود دارد. یک مهره را به طور تصادفی بیرون می‌آوریم: (۱)

الف) احتمال اینکه مهرهٔ سفید بیرون بیاید چقدر است؟

ب) احتمال اینکه مهرهٔ آبی بیرون نیاید چقدر است؟

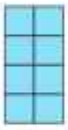
۱۸- شکل B را طوری رسم کنید که بتوانیم با دو تبدیل متوالی، شکل A را بر شکل C منطبق کنیم. روی هر فلش نوع تبدیل انجام شده را بنویسید. (۱)

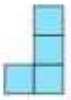


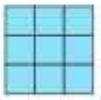
$A \longrightarrow B \longrightarrow C$

۱۹- اگر $۲^a = ۱۸$ باشد، حاصل $۲^{a+۲}$ برابر با چه عددی است؟ (۱)

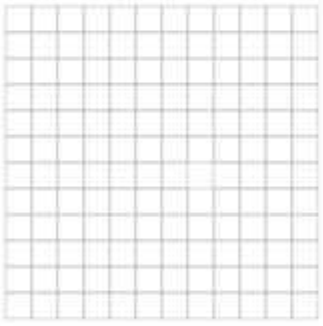
۲۰- جسمی که نمای بالا، راست و روبه‌روی آن مانند تصاویر زیر است، از چند مکعب واحد تشکیل شده است؟ (۱)


بالا


راست


روبه‌رو

۲۱- بردار $\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}۲\\-۳\end{bmatrix}$ را با شروع از نقطهٔ $\begin{bmatrix}-۱\\-۱\end{bmatrix}$ رسم کنید، سپس: (۱/۵)



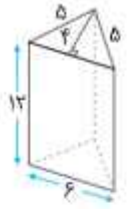
الف) جمع متناظر با بردار $\overrightarrow{AB}$ را بنویسید.

ب) بردار قرینهٔ آن را از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۲\\۰\end{bmatrix}$ رسم کنید.

۲۲- دمای هوای اصفهان ۱۰ درجه زیر صفر و دمای هوای آبادان ۱۵ درجه گرم‌تر از اصفهان است. میانگین دمای این دو شهر چقدر است؟ (۰/۵)

۲۳- دو عدد صحیح که حاصل ضرب آن‌ها ۳۶ و حاصل جمع آن‌ها کمترین مقدار ممکن است را مشخص کنید. (۱)

۲۴- با توجه به شکل مقابل به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (۱/۵)



الف) حجم شکل مقابل چقدر است؟

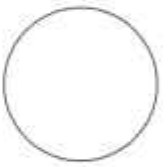
ب) مساحت جانبی و مساحت کل آن را حساب کنید.

۲۵- مقدار تقریبی $\sqrt{۷۰}$ را به‌دست آورید. (۱/۵)

۲۶- در یک مسابقهٔ دو و میدانی برسام و پویا از یک نقطه شروع به دویدن می‌کنند. اگر برسام هر ۲۸ دقیقه و پویا هر ۲۱ دقیقه یک دور کامل را طی کند، پس از چند دقیقه هر دوی آن‌ها همزمان به نقطهٔ شروع حرکت خود می‌رسند؟ (۱/۵)

۲۷- جدول زیر تعداد اعضای بازیکنان در رشته‌های مختلف ورزشی یک باشگاه را نشان می‌دهد. جدول را کامل کنید و سپس نمودار دایره‌ای آن را رسم کنید. (۱/۵)

نام ورزش	والیبال	بسکتبال	فوتبال	تنیس
تعداد	۹۰	۱۲۰	۳۰	۶۰
درصد				
کسر با مخرج ۱۰				



۲۸- نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}۲x-۱\\x+۲\end{bmatrix}$ را که روی محور طول‌ها قرار دارد، با بردار $\vec{a}$ انتقال داده‌ایم و به نقطهٔ $A'=\begin{bmatrix}۳\\-۲\end{bmatrix}$ رسیده‌ایم. مختصات بردار $\vec{a}$ را مشخص کنید. (۱/۵)

سؤال آزمون	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸
کد مفاهیم کلیدی	۹۰	۹۶ ۹۸	۳۱	۷۰	۶۶	۳۳	۱۰۴	۳۶ ۴ ۲۷	۵۵	۳۷	۶۱ ۶۴	۸۱	۲۱	۴۰ ۴۱	۷۸ ۷۷ ۸۳	۲۳	۱۰۱	۴۹ ۵۰	۸۰	۶۷ ۶۸	۹۴	۲۵	۲	۷۰ ۶۸ ۷۱	۸۳	۶۴	۹۹	۹۲ ۸۹ ۹۳