آزمون شماره ۱

ریاضی (۳) دوازدهم - دی ماه

رشتهٔ علوم تجربی (طبقه‌بندی شده)

هشتگ امتحان

مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۳

آزمون ۱

پاسخنامه ۲۶

ردیف		نمره

فصل ۱

۱ نمودار تابع $f(x) = -(x+۲)^۳ + ۱$ را با روش انتقال رسم کنید. (قزوین - هیأت امنایی پاسداران - دی ۹۷) — ۱

۲ حدود a را طوری تعیین کنید تا تابع $y = (\frac{۲-a}{a+۱})^{x-۱}$ اکیداً صعودی باشد. (تهران - نمونه دولتی فراهت - دی ۹۹) — ۱/۲۵

۳ اگر $f(x) = \sqrt{۳-۲x}$ و $g(x) = \frac{۶}{۳x-۵}$، دامنه و ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ را تعیین کنید. (تهران - مدرسهٔ باقرالعلوم - دی ۹۷) — ۱

دامنهٔ تابع مرکب رو حتماً از تعریف به‌دست بیار نه از روی ضابطهٔ اون!

۴ با توجه به ضابطه‌های توابع f و g، معادلهٔ $(fog)(x) = -۳$ را تشکیل داده و حل کنید. — ۱/۵

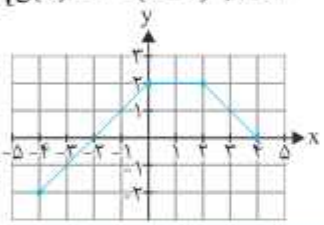
$$\begin{cases} f(x) = ۲x^۲ + x - ۴ \\ g(x) = ۲x + ۱ \end{cases}$$

۵ نشان دهید توابع مقابل وارون یکدیگر هستند. — ۱/۵

$$\begin{cases} f(x) = ۱ + \sqrt{۱-x} \\ g(x) = ۱ - (x-۱)^۲ ; x \geq ۱ \end{cases}$$

۶ با استفاده از نمودار تابع $f(x)$، نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}f(۲x) - ۱$ را رسم کنید. — ۱

(چهارمحال و بختیاری - مدرسهٔ علامه طباطبایی - دی ۹۷)



فصل ۲

۷ اگر $\cos x = \frac{۱۲}{۱۳}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، مقدار $\sin ۲x$ و $\cos ۲x$ را به‌دست آورید. — ۲

(قزوین - مدرسهٔ شهید باریک‌بین - دی ۹۷)

۸ یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت $۲۰ m/s$ برای هم‌تیمی خود که در ۸ متری او قرار دارد، پرتاب می‌کند. اگر رابطهٔ بین سرعت توپ v (برحسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شدهٔ افقی d (برحسب متر) و زاویهٔ پرتاب θ به‌صورت زیر باشد، آنگاه زاویهٔ پرتاب توپ چقدر بوده است؟ — ۱/۵

$$\sqrt{d} = \frac{v \sin ۲\theta}{۵}$$

۹ تعداد جواب‌های معادلهٔ $۴\sin ۳x . \cos ۳x = ۱$ در بازهٔ $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ چند تاست؟ (نهایی - خارج ۹۹) — ۱/۵

برای حل معادلات مثلثاتی که هم سینوس و هم کسینوس دارن، باید نسبت‌های مثلثاتی رو هم‌نام کنیم.

فصل ۳

۱۰ حاصل حدود زیر را به‌دست آورید. — ۳/۵

الف) $\lim_{x \to -۱} \frac{۲x^۲ + ۳x + ۱}{x^۲ - ۱} =$

ب) $\lim_{x \to -۸} \frac{۲x + ۱۶}{۲ + \sqrt[۳]{x}} =$

ج) $\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{[x] + ۱}{۱ - \sin x} =$

د) $\lim_{x \to -\infty} (-x^۳ + ۲x^۲ + ۳x - ۱) =$

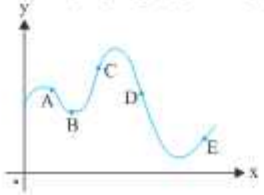
هـ) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-۵x + ۴}{x^۳ + x - ۸} =$

۱۱ اگر $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b + ۲x^۳ - ۱}{ax^۳ + x^۲ - x} = ۱$ باشد و a و b اعداد طبیعی باشند، $a + b$ چند مقدار می‌تواند داشته باشد؟ (تهران - نمونه دولتی صدر - دی ۱۴۰۰) — ۱/۵

فصل ۴

۱۲ تابع $f(x) = ۴ - x^۲$ مفروض است. در نقطهٔ برخورد نمودار تابع f با محور xها، معادلهٔ خط مماسی را بنویسید که شیب آن مثبت باشد. — ۱/۵

۱۳ نقاط داده شده روی منحنی را با شیب‌های ارائه شده در جدول زیر نظیر کنید. — ۱/۲۵



شیب	$-۰/۵$	-۲	۰	$۰/۵$	۲
نقطه					

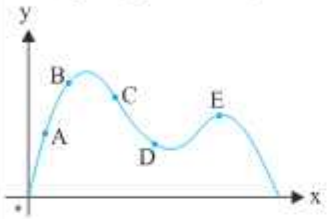
موفق باشید.

جمع نمره ۲۰

آزمون شماره ۲	ریاضی (۳) دوازدهم - دی ماه رشتهٔ علوم تجربی (طبقه‌بندی شده)	هشتگ امتحان	مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه تعداد سؤال: ۱۳

ردیف		نمره
	فصل ۱	
۱	تابع $y = x^۳ + ax^۲ - bx + c$ انتقال یافتهٔ تابع $f(x) = x^۳$ به اندازهٔ ۲ واحد در امتداد محور طول‌ها به‌سمت راست و ۳ واحد در امتداد محور عرض‌ها به سمت بالا است. مقادیر a، b و c را به‌دست آورید. (خراسان رضوی - مدرسهٔ حاج آخوند ملاعباس - دی ۹۷)	۱/۵
۲	با استفاده از تابع $y = \sqrt{x}$، نمودار تابع $y = ۲ - \sqrt{۳ - x}$ را رسم کنید. (اصفهان - نمونه دولتی صدر - دی ۱۴۰۰)	۱/۲۵
۳	اگر $f(x) = \sqrt{x+۲}$ و $g(x) = x^۲ - ۳$ باشد، دامنه و ضابطهٔ تابع $(fog)(x)$ را به‌دست آورید. (البرز - مدرسهٔ حضرت فاطمه (س) - دی ۹۷)	۱/۲۵
۴	الف) اگر $f(g(x)) = ۴x^۲ - ۲x + ۶$ و $f(x) = ۲x - ۴$ باشد، ضابطهٔ تابع g را به‌دست آورید.	۱
	ب) مقدار $(gof)(۱)$ چقدر است؟	
۵	نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۲x + ۱$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحلهٔ آخر نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید. (تهران - شهریور ۱۴۰۰)	۱
۶	با محدود کردن دامنهٔ تابع $f(x) = x^۲ - ۶x + ۳$ به بازهٔ $(۳, +\infty)$ تابع یک به یک می‌شود. ضابطهٔ وارون این تابع را در این بازه به‌دست آورید. (قزوین - هیأت امنایی باهدار - دی ۹۷)	۱
	فصل ۲	
۷	ضابطهٔ مربوط به نمودار تابع زیر را بنویسید. (چهارمحال و بختیاری - مدرسهٔ علامه طباطبایی - دی ۹۷) برای شروع، سینوس یا کسینوس بودن تابع رو مشخص کن.	۱/۵
۸	α زاویه‌ای حاده بوده و $\cos ۲\alpha = -\frac{۱}{۹}$ است. مقادیر $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۹	معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید و جواب‌های کلی معادله را بنویسید. (مشهد - مدرسهٔ امام رضا (ع) - دی ۹۷) الف) $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ ب) $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$	۲/۲۵
	فصل ۳	
۱۰	حاصل حدود مقابل را به‌دست آورید. (تهران - دی ۱۴۰۰) الف) $\lim_{x\to ۵} \frac{x^۳ - ۴x^۲ - ۴x - ۵}{x^۳ - ۲۵} =$ ب) $\lim_{x\to -۱} \frac{x^۲ - ۱}{x + \sqrt{x+۲}} =$ ج) $\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x] - ۳}{x - ۳} =$ د) $\lim_{x\to ۰} \frac{x+۱}{\sin^۲ x} =$ هـ) $\lim_{x\to +\infty} \frac{-۶x^۳ + ۷x - ۹}{۴x^۳ - ۲x^۳ + ۳} =$	۳/۵

۱۱	می‌دانیم چندجمله‌ای $f(x)=x^۳+ax^۲-۳x-۱$ بر دوجمله‌ای $x+۱$ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $g(x)=۲x^۳-x^۲+x+۳$ بر $x+a$ را به‌دست آورید.	۱/۵
	فصل ۴	
۱۲	اگر $f(x)=۱+\sqrt{-x}$، با استفاده از تعریف، مقدار $f'(-۱)$ را به‌دست آورید و معادلهٔ خط مماس بر منحنی f را در نقطه‌ای به طول (-۱) واقع بر آن بنویسید.	۱/۵
۱۳	با استفاده از نقاط $A، B، C، D$ و E روی نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید. (برای قسمت‌های (الف) و (ب) یک مورد کافی است.) (خارج از کشور - شهریور ۱۴۰۱ - با اندکی تغییر)	۱/۵



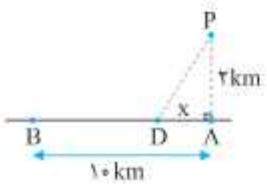
الف) در کدام‌یک از نقاط، شیب منحنی منفی است؟

ب) در کدام‌یک از نقاط، شیب منحنی مثبت است؟

ج) نقاط A تا E را برحسب شیب از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

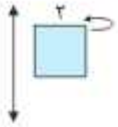
آزمون شماره ۶	ریاضی (۳) دوازدهم - خرداد ماه رشتهٔ علوم تجربی (طبقه‌بندی شده)	هشتگ امتحان	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه تعداد سؤال: ۱۴

ردیف		نمره
	فصل ۱	
۱	نمودار تابع $y = ۲ - \sqrt{-x}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.	۲
	فصل ۲	
۲	معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x + \cos ۳x = ۰$ را حل کرده و جواب‌های آن را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ پیدا کنید.	۲
	برای حل این معادله مثلثاتی، ضمناً به رابطهٔ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ نیاز پیدا می‌کنید!	
	فصل ۳	
۳	الف) عبارت $\lim\limits_{x \to ۲^-} f(x) = +\infty$ به چه معناست؟ توضیح دهید.	۱/۵
	ب) عبارت $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = ۰$ به چه معناست؟ توضیح دهید.	
	ج) نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در هر دو شرط بالا صدق کند. مسئله چند جواب دارد؟	
	فصل ۴	
۴	با استفاده از تعریف مشتق، شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x} + ۱$ را در نقطه‌ای به طول ۱ به‌دست آورید.	۱
۵	برای تابع $f(x) = \lvert x^۲ - ۴ \rvert$:	۱/۵
	الف) با استفاده از تعریف مشتق، نشان دهید مشتق در $x = ۲$ موجود نیست.	
	ب) معادلهٔ نیم‌مماس‌های راست و چپ در $x = ۲$ را بنویسید.	
۶	مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (نیازی به ساده کردن نیست.)	۱/۲۵
	الف) $f(x) = (x^۳ + ۱)(-۲x^۲ + x + ۲)$ ب) $g(x) = (\frac{x^۲ - ۱}{۲x + ۱})^۳$	
۷	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = t^۲ + \sqrt{۷t + ۲}$ گرم است.	۱/۲۵
	الف) جرم این توده باکتری در بازهٔ زمانی $۲ \le t \le ۱$ چند گرم افزایش می‌یابد؟	
	ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظهٔ $t = ۲$ چقدر است؟	
	فصل ۵	
۸	نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.	۱/۵
	الف) $f(x) = x^۳ + x^۲ - x$ ب) $g(x) = x\sqrt{x + ۱}$	
۹	مقادیر m و n را طوری به‌دست آورید که نقطهٔ $(-۱, ۳)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = mx^۳ - ۳x^۲ + n$ باشد.	۱
۱۰	مسعود درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک‌ترین نقطهٔ ساحل یعنی A، معادل ۲ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطهٔ B در ساحل برسد که در ۱۰ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق $۳\frac{km}{h}$ و سرعت پیاده‌روی مسعود در ساحل $۵\frac{km}{h}$ باشد. اگر او بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به‌سوی نقطهٔ B پیاده‌روی کند؟	۱/۲۵



فصل ۶

۱۱ مربعی با ضلع ۲ واحد، مطابق شکل در فاصلهٔ ۱ واحد از یک خط راست قرار دارد. ۱



الف) شکل حاصل از دوران این مربع حول محور داده شده را رسم و حجم آن را محاسبه کنید.

ب) سطح مقطع این شکل را در برخورد با صفحه‌ای موازی با قاعدهٔ آن توصیف کنید.

۱۲ نقاط $(-۲,۱)$ و $(۲,۱)$ کانون‌های یک بیضی هستند. اگر نقطهٔ $(-۲,۴)$ روی این بیضی قرار داشته باشد: ۱/۵

الف) خروج از مرکز بیضی را به‌دست آورید.

ب) مختصات دو سر قطر کانونی را بیابید.

طبق تعریف بیضی، فاصلهٔ هر نقطه روی بیضی از کانون‌های بیضی برابر مقدار ثابت $۲a$ است.

۱۳ دایره‌ای به مرکز $(۲,۳)$ روی خط $۳x + ۲y + ۱ = ۰$ وتری به طول ۱۲ جدا می‌کند. معادلهٔ این دایره را بنویسید. ۱/۲۵

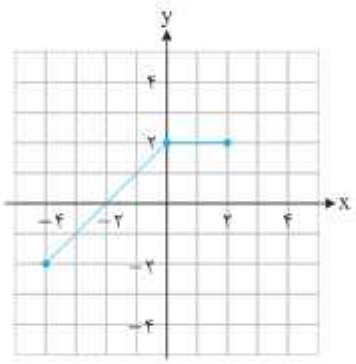
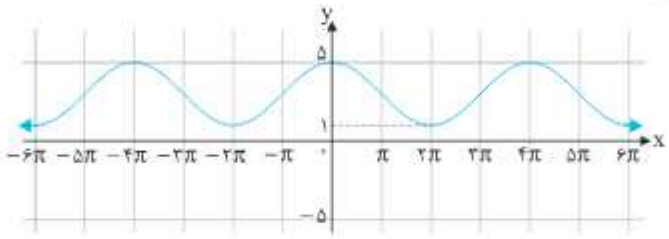
فصل ۷

۱۴ یک سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید، ۲ سکهٔ دیگر و اگر پشت بیاید ۱ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش، احتمال اینکه دقیقاً ۱ سکهٔ رو ظاهر شود چقدر است؟ ۲

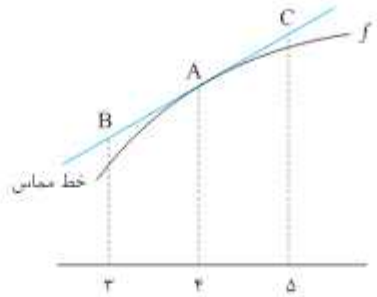
جمع نمره ۲۰

موفق باشید.

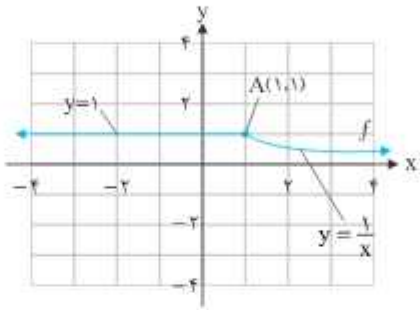
آزمون شماره ۱۰	سؤالات امتحان نهایی خردادماه ۱۴۰۰ دانش‌آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور سؤالات امتحانی ریاضی (۳) علوم تجربی پایهٔ دوازدهم (دورهٔ دوم متوسطه)	هشتگ امتحان	مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه تعداد سؤال: ۱۶

ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن است. ب) هرچه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد.	۰/۵
۲	در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. الف) بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x^3-3x$ در آن اکیداً نزولی است برابر ..... است. ب) شعاع دایره‌ای به معادله $x^2+y^2-2x-3=0$ برابر ..... است.	۰/۵
۳	با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار تابع $y=f(-x)+2$ را رسم کنید. 	۰/۷۵
۴	اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=2x^2-1$ باشد، الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید. ب) مقدار $(gof)(2)$ را تعیین کنید.	۱/۲۵
۵	نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y=a\cos bx+c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید. 	۱
۶	معادلهٔ مثلثاتی $\sin x\cos x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ را حل کنید.	۱
۷	حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. الف) $\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$ ب) $\lim_{x\to(-\frac{1}{3})}\frac{[x]}{\lvert 3x+1\rvert}$ ج) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x}-5}$	۲

۸	برای تابع f در شکل زیر داریم $f'(۴) = ۱/۵$ و $f(۴) = ۲۴$ با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.	۱



۹	با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f در نقطهٔ A، نشان دهید که تابع f در نقطهٔ A مشتق‌پذیر نیست.	۱



۱۰	مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)	۱/۵

الف) $f(x) = \dfrac{۹x - ۲}{\sqrt{x}}$

ب) $g(x) = (۳x^۲ - ۴)(۲x - ۵)^۳$

۱۱	جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادلهٔ $h(t) = -۵t^۲ + ۴۰t$ به‌دست می‌آید.	۱/۵

الف) سرعت متوسط جسم را در بازه $[۵,۸]$ به‌دست آورید.

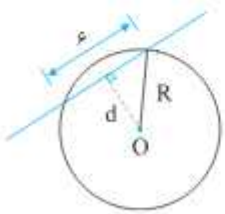
ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم ۳۵ m/s است.

۱۲	اگر نقطهٔ $(۲,۱)$، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ باشد، مقادیر b و d را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۳	در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید.	۱/۵
۱۴	کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است.	۱/۵

الف) فاصلهٔ کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = ۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است.)

۱۵	مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(۲,-۳)$ است. این دایره روی خط $۳x - ۴y + ۲ = ۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ دایره را بنویسید.	۱/۵



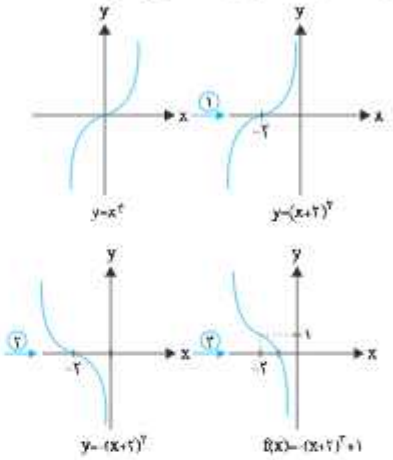
۱۶	اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟	۲

	موفق باشید.	جمع نمره ۲۰

پاسخنامه

آزمون شماره ۱ نوبت اول دی ماه

۱- [۹۴] و [۹۸] ① نمودار $y = x^۳$ را ۲ واحد به چپ حرکت می‌دهیم تا $y = (x+۲)^۳$ به‌دست آید. ② نمودار $y = (x+۲)^۳$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم تا $y = -(x+۲)^۳$ به‌دست آید.
③ در نهایت نمودار $y = -(x+۲)^۳$ را ۱ واحد به بالا منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x) = -(x+۲)^۳ + ۱$ حاصل شود.



۲- [۹۵] باید پایهٔ تابع نمایی مقداری بیشتر از یک باشد:

$$\frac{۲-a}{a+۱} > ۱ \Rightarrow \frac{۲-a}{a+۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{۱-۲a}{a+۱} > ۰$$

a	-۱		$\frac{۱}{۲}$
$\frac{۱-۲a}{a+۱}$	−	+	−

$$\Rightarrow -۱ < a < \frac{۱}{۲}$$

۳- [۹۶] ابتدا دامنهٔ هر یک از توابع f و g را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x) = \sqrt{۳-۲x} : ۳-۲x \geq ۰ \Rightarrow x \leq \frac{۳}{۲} \Rightarrow D_f = (-\infty, \frac{۳}{۲}]$$

$$g(x) = \frac{۶}{۳x-۵} : ۳x-۵ \neq ۰ \Rightarrow x \neq \frac{۵}{۳} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{\frac{۵}{۳}\}$$

دامنهٔ تابع مرکب fog به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \neq \frac{۵}{۳} \mid \frac{۶}{۳x-۵} \leq \frac{۳}{۲}\}$$

$$\frac{۶}{۳x-۵} \leq \frac{۳}{۲} \Rightarrow \frac{۶}{۳x-۵} - \frac{۳}{۲} \leq ۰ \Rightarrow \frac{۱۲-۹x+۱۵}{۲(۳x-۵)} \leq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۹(۳-x)}{۲(۳x-۵)} \leq ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} D_{fog} = (-\infty, \frac{۵}{۳}) \cup [۳, +\infty)$$

ضابطهٔ تابع fog برابر می‌شود با:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{۳-۲g(x)} = \sqrt{۳-\frac{۱۲}{۳x-۵}} = \sqrt{\frac{۹x-۲۷}{۳x-۵}}$$

۴- [۹۶] معادلهٔ مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$(fog)(x) = -۳ \Rightarrow f(g(x)) = -۳$$

$$\Rightarrow ۲(g(x))^۲ + g(x) - ۴ = -۳ \Rightarrow ۲(۲x+۱)^۲ + (۲x+۱) - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲(۴x^۲ + ۴x + ۱) + ۲x = ۰ \xrightarrow{\div ۲} ۴x^۲ + ۵x + ۱ = ۰$$

معادلهٔ نهایی را حل می‌کنیم:

$$\Delta = ۵^۲ - ۴(۴ \times ۱) = ۹ \Rightarrow x = \frac{-۵ \pm \sqrt{۹}}{۲(۴)} \Rightarrow x = -۱, \frac{-۱}{۴}$$

۵- [۹۹] باید ثابت کنیم ترکیب دو تابع f و g برابر تابع همانی است؛ یعنی:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۱ + \sqrt{۱ - g(x)} = ۱ + \sqrt{(x-۱)^۲}$$

$$= ۱ + |x-۱| \xrightarrow{x \geq ۱} (fog)(x) = ۱ + (x-۱) = x$$

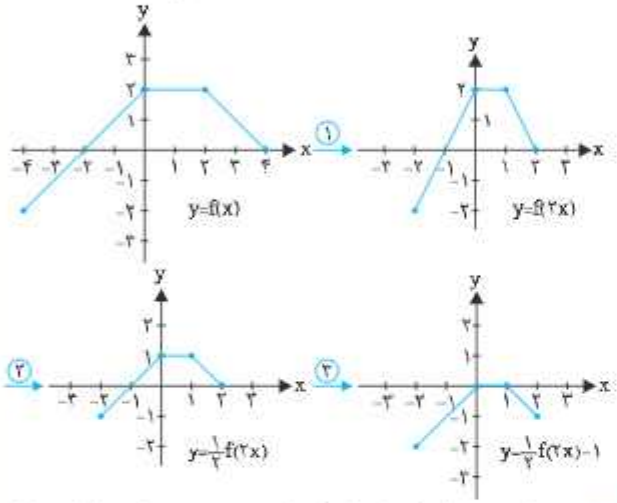
همچنین:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = ۱ - (f(x)-۱)^۲ = ۱ - (\sqrt{۱-x})^۲$$

$$= ۱ - (۱-x) = x$$

بنابراین دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

۶- [۹۸] ① برای رسم نمودار $f(۲x)$، طول نقاط نمودار تابع $f(x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم. ② برای رسم نمودار $\frac{۱}{۲}f(۲x)$، عرض نقاط نمودار تابع $f(۲x)$ را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌کنیم. ③ در آخر، نمودار $y = \frac{۱}{۲}f(۲x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار $y = \frac{۱}{۲}f(۲x) - ۱$ حاصل شود.



۷- [۹۴] با توجه به اینکه انتهای کمان x در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد، پس سینوس آن مقداری منفی است:

$$\sin x = -\sqrt{۱ - \cos^۲ x} = -\sqrt{۱ - (\frac{۱۲}{۱۳})^۲} = -\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶۹}} = -\frac{۵}{۱۳}$$

مقادیر سینوس و کسینوس کمان ۲x به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sin ۲x = ۲ \sin x . \cos x = ۲(\frac{-۵}{۱۳})(\frac{۱۲}{۱۳}) = \frac{-۱۲۰}{۱۶۹}$$

$$\cos ۲x = ۲ \cos^۲ x - ۱ = ۲(\frac{۱۲}{۱۳})^۲ - ۱ = \frac{۱۱۹}{۱۶۹}$$

۸- [۹۵] مقادیر v و d را در رابطهٔ داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\sqrt{۸} = \frac{۲۰ \sin ۲\theta}{۵} \Rightarrow \sin ۲\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin \frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲\theta = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} & , \quad k \in \mathbb{Z} \\ ۲\theta = (۲k+۱)\pi - \frac{\pi}{۴} & , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

واضح است که $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$. پس جواب‌های قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{۸}$ و $\theta = \frac{۳\pi}{۸}$ می‌باشد.

۹- [۱۰۴] می‌دانیم: $\sin\alpha.\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$

$$۴\sin ۳x\cos ۳x=۲\sin ۶x$$

بنابراین:

$$۲\sin ۶x=۱\Rightarrow \sin ۶x=\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۶x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ ۶x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶} & k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{k\pi}{۳}+\frac{۵\pi}{۳۶} & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$k=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۳۶},\frac{۵\pi}{۳۶}$$

$$k=۱\Rightarrow x=\frac{۱۳\pi}{۳۶},\frac{۱۷\pi}{۳۶}$$

$\Rightarrow$ ۴ جواب

۱۰- الف) [۱۰۸] $\lim\limits_{x\to-۱}\frac{۲x^۲+۳x+۱}{x^۲-۱}=\frac{۰}{۰}$

$(x+۱)$ عامل صفرشوندهٔ صورت و مخرج است که باید آن را حذف کنیم:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{۲x^۲+۳x+۱}{x^۲-۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{(۲x+۱)\cancel{(x+۱)}}{(x-۱)\cancel{(x+۱)}}=\frac{-۱}{-۲}=\frac{۱}{۲}$$

ب) [۱۰۸] $\lim\limits_{x\to-۸}\frac{۲x+۱۶}{۲+\sqrt[۳]{x}}=\frac{۰}{۰}$

مخرج کسر، رادیکال با فرجهٔ ۳ دارد که با استفاده از اتحاد چاق و لاغر آن را گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-۸}\frac{۲x+۱۶}{۲+\sqrt[۳]{x}}=\lim_{x\to-۸}\frac{۲(x+۸)(۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x})}{\underbrace{(۲+\sqrt[۳]{x})(۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x})}_{۲^۳+(\sqrt[۳]{x})^۳}}$$

$$=\lim_{x\to-۸}\frac{۲\cancel{(x+۸)}(۴+\sqrt[۳]{x^۲}-۲\sqrt[۳]{x})}{\cancel{(x+۸)}}=۲(۴+۴+۴)=۲۴$$

ج) [۱۰۹] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{[x]+۱}{۱-\sin x}=\frac{[\frac{\pi}{۲}]+۱}{۱-۱}=\frac{۲}{۰}=\infty$ ($\frac{\pi}{۲}\approx ۱/۵۷$)

برای اینکه مشخص کنیم حاصل حد $+\infty$ می‌شود یا $-\infty$، باید به این توجه کنیم که وقتی $x\to\frac{\pi}{۲}$، مقدار $\sin x$ با مقادیر کمتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک می‌شود، پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{[x]+۱}{۱-\sin x}=\frac{۱+۱}{۱-۱^-}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$$

د) [۱۱۲] $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^۳+۲x^۲+۳x-۱)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^۳)=-(-\infty)^۳=+\infty$

هـ) [۱۱۱] $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۵x+۴}{x^۳+x-۸}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۵x}{x^۳}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۵}{x^۲}=\frac{-۵}{+\infty}=۰$

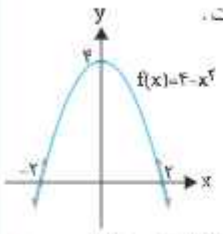
۱۱- [۱۱۱] چون حاصل حد در $+\infty$ یک عدد حقیقی شده است، پس $b\le ۳$ است:

حالت اول) $b=۳\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲}{ax^۳}=۱\Rightarrow a=۳$

حالت دوم) $b=۲$ یا $۱\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳}{ax^۳}=۱\Rightarrow a=۲$

پس $a+b$ می‌تواند $\begin{cases}۳+۳=۶\\ ۲+۲=۴\\ ۱+۲=۳\end{cases}$ باشد.

۱۲- [۱۱۴] تابع $f(x)=۴-x^۲$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۲ و -۲ قطع می‌کند. مطابق نمودار تابع f، شیب خط مماس در نقاط $x=۲$ و $x=-۲$ به‌ترتیب منفی و مثبت است.



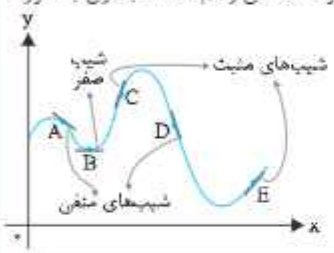
صورت سؤال، معادلهٔ خط مماس در $x=-۲$ را خواسته که به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$f'(x)=-۲x$$

$$\Rightarrow f'(-۲)=۴$$ (شیب خط مماس)

$$y-۰=۴(x-(-۲))\Rightarrow y=۴x+۸$$ (معادلهٔ خط مماس)

۱۳- [۱۱۲] و [۱۱۴] با توجه به شیب خطوط مماس رسم شده، جدول به‌صورت زیر تکمیل می‌شود:



شیب	$-۰/۵$	-۲	۰	$۰/۵$	۲
نقطه	A	D	B	E	C

آزمون شماره ۲ نوبت اول دی ماه

۱- [۱۲۴] در این سؤال نیازی به رسم کردن تابع نیست، فقط کافیست تبدیل‌های نمودار را روی ضابطهٔ آن اعمال کنیم.

۱) اگر تابع $f(x)=x^۳$ به اندازهٔ ۲ واحد در امتداد محور طول‌ها به راست برود، معادلهٔ آن به‌صورت $g(x)=(x-۲)^۳$ تغییر می‌کند.

۲) اگر تابع $g(x)=(x-۲)^۳$ را ۳ واحد در امتداد محور عرض‌ها به بالا ببریم، معادلهٔ آن به‌صورت $y=(x-۲)^۳+۳$ خواهد شد. پس داریم:

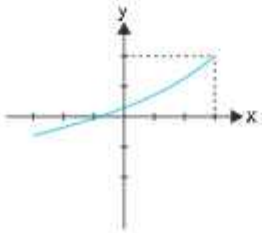
$$y=(x-۲)^۳+۳=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸+۳$$

$$=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۵$$

$$\Rightarrow a=-۶,b=-۱۲,c=-۵$$

۲- [۱۲۴]

$$\sqrt{x}\xrightarrow{\text{نمودار }۳\text{ واحد به چپ}}\sqrt{x+۳}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}}\sqrt{۳-x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}}-\sqrt{۳-x}\xrightarrow{۲\text{ واحد به بالا}}y=۲-\sqrt{۳-x}$$



۳- [۹۶] ابتدا دامنهٔ توابع f و g را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x+2}: D_f=[-2,+\infty)$$

$$g(x)=x^2-3: D_g=\mathbb{R}$$

دامنهٔ تابع مرکب fog به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-3\geq -2\}$$

$$x^2-3\geq -2\Rightarrow x^2\geq 1$$

$$\Rightarrow \text{مجموعهٔ جواب}=\{x\mid x\leq -1\}\cup\{x\mid 1\leq x\}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

ضابطهٔ تابع fog برابر می‌شود با:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)+2}=\sqrt{x^2-1}$$

۴- [۹۶] **الف)** در ضابطهٔ تابع $f(x)$ به‌جای x، عبارت $g(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=2x-4\Rightarrow f(g(x))=2g(x)-4 \\ f(g(x))=4x^2-2x+6 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 4x^2-2x+6=2g(x)-4\Rightarrow g(x)=2x^2-x+5$$

ب)

$$f(1)=2\times 1-4=-2$$

$$\Rightarrow (gof)(1)=g(f(1))=g(-2)=2\times 4-(-2)+5=15$$

۵- [۹۶]

$$f(x)=(x^2-2x+1)=(x-1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} y=(x-1)^2-2$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد چپ}} y=(x-1+1)^2-2=x^2-2$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور }x\text{ها}} y=-(x^2-2)=-x^2+2$$

۶- [۹۸] ابتدا ضابطهٔ تابع را مربع کامل می‌کنیم:

$$f(x)=x^2-6x+3=((x-3)^2-9)+3=(x-3)^2-6$$

این تابع با دامنهٔ محدود شدهٔ $(3,+\infty)$ که در صورت سؤال داده شده، یک به یک است و وارون دارد. x را برحسب y به‌دست می‌آوریم:

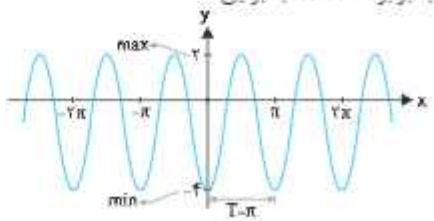
$$y=(x-3)^2-6\Rightarrow (x-3)^2=y+6$$

$$\Rightarrow (x-3)=\pm\sqrt{y+6}\Rightarrow x=\pm\sqrt{y+6}+3$$

طبق دامنه $x>3$ است، پس فقط جواب مثبت قابل قبول است و در نتیجه داریم:

$$x=\sqrt{y+6}+3\xrightarrow{x\leftrightarrow y} f^{-1}(x)=\sqrt{x+6}+3$$

۷- [۹۲] با توجه به شکل نمودار، ضابطهٔ تابع مورد نظر می‌تواند به‌صورت $y=a\cos bx+c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۲ و -4 و دورهٔ تناوب برابر π است. بنابراین:



$$\begin{cases} |a|+c=2 \\ -|a|+c=-4 \end{cases}\Rightarrow |a|=3, c=-1 \quad T=\frac{2\pi}{|b|}=\pi\Rightarrow |b|=2$$

با توجه به نمودار، a منفی و b مثبت است، بنابراین $a=-3$ و $b=2$. لذا ضابطهٔ تابع مورد نظر به‌صورت زیر است:

$$y=-3\cos 2x-1$$

۸- [۹۴] ابتدا مقدار $\sin\alpha$ (یا $\cos\alpha$) را توسط $\cos 2\alpha$ به‌دست می‌آوریم:

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=-\frac{1}{9}\Rightarrow 2\sin^2\alpha=\frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{5}{9}\xrightarrow{\alpha\text{ زاویهٔ حاده}}\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

مقدار $\cos\alpha$ نیز برابر می‌شود با:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{5}{9}}=\frac{2}{3}$$

۹- [۹۵] **الف)**

$$2\sin 3x-\sqrt{2}=0\Rightarrow \sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

می‌دانیم $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$، پس:

$$\sin 3x=\sin\frac{\pi}{4}\Rightarrow\begin{cases} 3x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12} \\ 3x=2k\pi+(\pi-\frac{\pi}{4})\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

ب)

$$\cos 2x-\cos x+1=0$$

معادلهٔ مثلثاتی را برحسب $\cos x$ می‌نویسیم:

$$(2\cos^2 x-1)-\cos x+1=0\Rightarrow 2\cos^2 x-\cos x=0$$

$$\Rightarrow \cos x(2\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \cos x=0\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \\ \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۱۰- [۹۷] **الف)**

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^3-4x^2-4x-5}{x^2-25}=\frac{0}{0}$$

عامل صفر شوندهٔ $(x-5)$ در صورت و مخرج کسر وجود دارد. صورت کسر را بر $(x-5)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2-4x-5 & x-5 \\ \hline -(x^3-5x^2) & x^2+x+1 \\ \hline x^2-4x-5 & \\ -(x^2-5x) & \\ \hline x-5 & \\ -(x-5) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x^2+x+1)}{(x-5)(x+5)}=\frac{25+5+1}{10}=\frac{31}{10}$$

ب) [۹۸]

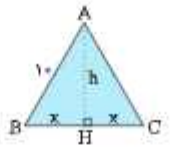
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+\sqrt{x+2}}=\frac{0}{0}$$

مخرج کسر، رادیکال با فرجهٔ ۲ دارد که با استفاده از اتحاد مزدوج آن را گویا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)(x-\sqrt{x+2})}{\underbrace{(x+\sqrt{x+2})(x-\sqrt{x+2})}_{x^2-x-2}}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)(x-\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(-2)(-2)}{-3}=\frac{4}{3}$$

۱۴- [۳۷] در مثلث متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع وارد بر قاعده، آن را نصف می‌کند:



$\overset{\Delta}{ABH}$ فیثاغورس در : $x^۲ + h^۲ = ۱۰۰$

$\Rightarrow h = \sqrt{۱۰۰ - x^۲}$ (۰/۲۵)

مساحت مثلث ABC را بر حسب متغیر x می‌نویسیم:

$S = \frac{۱}{۲}(۲x).h = x.h \Rightarrow S(x) = x\sqrt{۱۰۰ - x^۲}$ و $۰ < x < ۱۰$ (۰/۲۵)

نقاط بحرانی $S(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$S'(x) = (۱)\sqrt{۱۰۰ - x^۲} + x\left(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۱۰۰ - x^۲}}\right) = \frac{۱۰۰ - ۲x^۲}{\sqrt{۱۰۰ - x^۲}}$ (۰/۲۵)

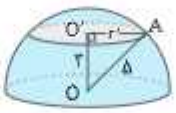
$S'(x) = ۰ \Rightarrow ۱۰۰ - ۲x^۲ = ۰$

$\Rightarrow x = \sqrt{۵۰} = ۵\sqrt{۲}$ (نقطهٔ بحرانی S) (۰/۲۵)

با توجه به جدول تغییرات، بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث برابر ۵۰ واحد مربع است. (۰/۲۵)

x	۰	$۵\sqrt{۲}$	۱۰
S'	+	۰	−
S		۵۰ (ماکزیمم مطلق)	

۱۵- [۳۸] و [۳۹] **الف)** شکل حاصل، یک نیمکره به شعاع ۵ است (۰/۲۵) که حجم آن برابر می‌شود با:



$V = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۴}{۳}\pi r^۳\right) = \frac{۲}{۳}\pi(۵)^۳ = \frac{۲۵۰\pi}{۳}$ (۰/۲۵)

ب) مطابق شکل، سطح مقطع پدید آمده از برخورد صفحهٔ P، یک دایره است (۰/۲۵) که شعاع آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\overset{\Delta}{OAO'}$ فیثاغورس در : $۳^۲ + r'^۲ = ۵^۲ \Rightarrow r' = ۴$ (۰/۲۵)

$S = \pi r'^۲ = ۱۶\pi$: مساحت سطح مقطع (۰/۲۵)

۱۶- [۳۱] توسط اطلاعات داده شده، پارامترهای بیضی را به‌دست می‌آوریم:

$\begin{cases} \text{قطر بزرگ} = ۳(\text{قطر کوچک}) \Rightarrow ۲a = ۳(۲b) \Rightarrow a = ۳b & (۰/۲۵) \\ \text{فاصلهٔ کانونی} = ۸ \Rightarrow ۲c = ۸ \Rightarrow c = ۴ & (۰/۲۵) \end{cases}$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۹b^۲ = b^۲ + ۱۶ \Rightarrow ۸b^۲ = ۱۶ \Rightarrow b = \sqrt{۲}$

طول قطر کوچک بیضی برابر با $۲b = ۲\sqrt{۲}$ است. (۰/۲۵)

۱۷- [۳۲] و [۳۳] **الف)** $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y - ۴ = ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز} = O\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right) = \left(\frac{-(-۲)}{۲}, \frac{-۴}{۲}\right) = (۱, -۲) & (۰/۲۵) \\ \text{شعاع} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + ۴^۲ - ۴(-۴)} = ۳ & (۰/۲۵) \end{cases}$

ب) با جای‌گذاری $x = ۰$ (محور y ها) و $y = ۰$ (محور x ها) نقاط برخورد با محورهای مختصات به‌دست می‌آید: (۰/۲۵)

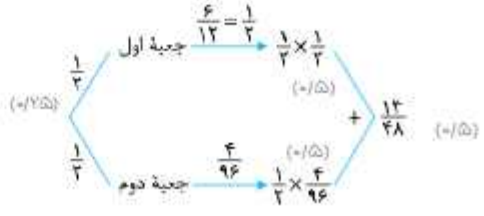
$\xrightarrow{x=۰} y^۲ + ۴y - ۴ = ۰ \Rightarrow y = \frac{-۴ \pm \sqrt{۳۲}}{۲}$

$= -۲ \pm ۲\sqrt{۲}$ (عرض نقاط برخورد با محور y ها) (۰/۲۵)

$\xrightarrow{y=۰} x^۲ - ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲ \pm \sqrt{۲۰}}{۲}$

$= ۱ \pm \sqrt{۵}$ (طول نقاط برخورد با محور x ها) (۰/۲۵)

۱۸- [۳۶]



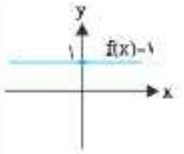
درسنامه

فصل ۱: تابع

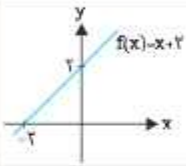
درس ۱: توابع چندجمله‌ای - توابع صعودی و نزولی

۹۴ توابع چند جمله‌ای - تابع درجهٔ ۳

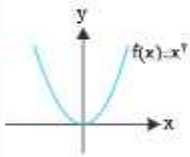
هر تابع به‌صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۰$ که در آن a_iها $(i = ۰, ۱, \ldots, n)$، اعداد حقیقی ثابت بوده و $a_n \neq ۰$ است، یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n نامیده می‌شود.



به‌ازای $n = ۰$، تابع چندجمله‌ای، یک **تابع ثابت** است که به‌صورت کلی $f(x) = k$ نمایش داده می‌شود.



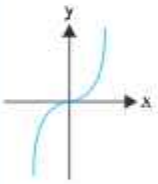
به ازای $n = ۱$، تابع چندجمله‌ای، یک **تابع خطی** است که به‌صورت کلی $f(x) = ax + b$ نمایش داده می‌شود.



به ازای $n = ۲$، تابع چند جمله‌ای، یک **تابع درجه دوم** است که به‌صورت کلی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ نمایش داده می‌شود.

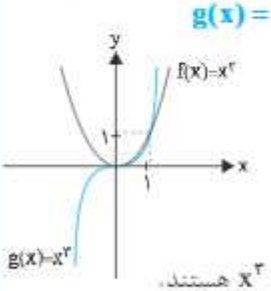
تابع درجهٔ ۳

تابع چند جمله‌ای $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$ (با شرط $a \neq ۰$) یک تابع درجهٔ ۳ است. در سال دوازدهم، فقط تابع $f(x) = x^۳$ را که دامنه و برد آن برابر $\mathbb{R}$ است، بررسی می‌کنیم:



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
f(x)	-۸	-۱	۰	۱	۸

مقایسهٔ نمودار توابع $f(x) = x^۲$ و $g(x) = x^۳$



الف) به ازای xهای منفی، مقادیر $x^۲$ بزرگ‌تر از $x^۳$ هستند.

ب) به ازای $x = ۰, ۱$، داریم $x^۲ = x^۳$.

ج) به ازای $۰ < x < ۱$، مقادیر $x^۲$ بزرگ‌تر از $x^۳$ هستند.

د) به ازای $x > ۱$، مقادیر $x^۲$ کوچک‌تر از $x^۳$ هستند.

انتقال افقی نمودار یک تابع درجهٔ ۳

برای رسم نمودار تابع $f(x) = (x + k)^۳$، ابتدا ریشهٔ تابع f یعنی $x = -k$ را به‌دست می‌آوریم، سپس نمودار تابع $y = x^۳$ را به اندازهٔ $(-k)$ واحد در راستای محور x ها منتقل می‌کنیم؛ اگر $(-k)$ عددی مثبت باشد، به سمت راست و اگر منفی باشد، به سمت چپ حرکت می‌دهیم.

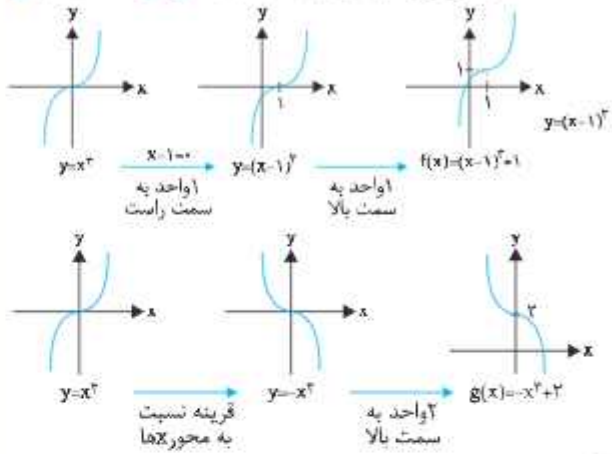
انتقال عمودی نمودار یک تابع درجهٔ ۳

برای رسم نمودار تابع $f(x) = x^۳ + m$، کافی است نمودار تابع $y = x^۳$ را به اندازهٔ m واحد (بسته به علامت آن) در راستای محور y ها منتقل کنیم.

● قرینهٔ نمودار یک تابع درجهٔ ۳ نسبت به محور x ها

فرض کنید $f(x)$ یک تابع درجهٔ ۳ باشد. برای رسم نمودار تابع $g(x)=-f(x)$، کافی است نمودار تابع f را رسم کرده و آن را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

مثال می‌خواهیم نمودارهای توابع $f(x)=(x-1)^3+1$ و $g(x)=-x^3+2$ را رسم کنیم: (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۵ کتاب درسی)



۹۵ یکنوایی توابع

تابع f را **اکیداً صعودی** می‌نامیم، اگر با افزایش مقادیر دامنهٔ x، مقادیر برد y نیز افزایش پیدا کنند؛ یعنی:

$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع f را **اکیداً نزولی** می‌نامیم، اگر با افزایش مقادیر دامنهٔ x، مقادیر برد y کاهش یابند؛ یعنی:

$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تذکر به تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی، تابع **اکیداً یکنوا** هم می‌گوییم.

تابع f را **صعودی** می‌نامیم، اگر با افزایش مقادیر دامنهٔ x، مقادیر برد y یا افزایش پیدا کنند یا تغییری نکنند؛ به بیان دیگر مقادیر y کاهش نیابند:

$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

تابع f را **نزولی** می‌نامیم، اگر با افزایش مقادیر دامنهٔ x، مقادیر برد y یا کاهش پیدا کنند یا تغییری نکنند؛ به بیان دیگر مقادیر y افزایش نیابند:

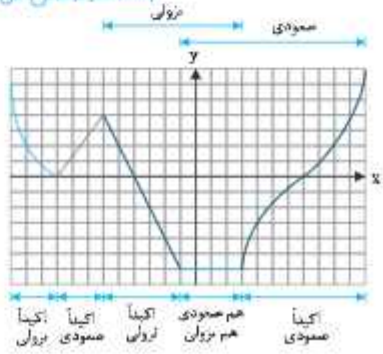
$$x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

تذکر به تابع صعودی یا نزولی، تابع **یکنوا** هم می‌گوییم.

تذکر ۱ تابع ثابت $f(x)=k$، در دامنه‌اش هم صعودی و هم نزولی است.

تذکر ۲ توابع اکیداً یکنوا، قطعاً یکنوا هستند ولی برعکس آن الزاماً برقرار نیست.

مثال در نمودار تابع زیر، بازه‌های صعودی و نزولی مشخص شده‌اند. (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۸ کتاب درسی)

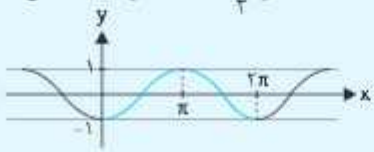


مثال برای هر یک از توابع زیر، مشخص کنید که در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی هستند.

الف) $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ $\quad D_f=[0,2\pi]$

ب) $g(x)=|x|+|x-3|$

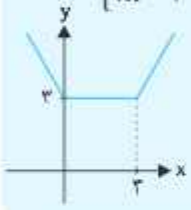
پاسخ الف) برای رسم تابع $f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{2})$، کافی است نمودار تابع $y=\sin x$ را $\frac{\pi}{2}$ به سمت راست منتقل کنیم:



مطابق شکل، تابع f در بازهٔ $[0,\pi]$ اکیداً صعودی و در بازهٔ $[\pi,2\pi]$ اکیداً نزولی است.

ب) تابع g بر اساس ریشه‌های داخل قدرمطلق به تابعی سه ضابطه‌ای تبدیل می‌شود:

$$g(x)=\begin{cases}-2x+3 & , \quad x<0\\ 3 & , \quad 0\le x\le 3\\ 2x-3 & , \quad x>3\end{cases}$$

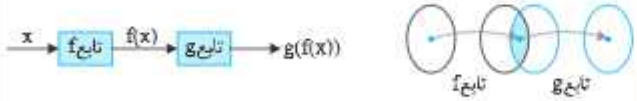


مطابق شکل، تابع g در بازهٔ $(-\infty,0)$ اکیداً نزولی، در بازهٔ $[0,3]$ هم صعودی و هم نزولی و در بازهٔ $(3,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

درس ۲: ترکیب توابع

۹۶ ترکیب توابع

فرض کنید f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند. تابع $g(f(x))$ که با نماد $(gof)(x)$ نمایش داده و آن را **تابع مرکب** می‌نامیم، بدین صورت تشکیل می‌شود که ابتدا x به‌عنوان ورودی تابع f قرار می‌گیرد و سپس حاصل آن یعنی $f(x)$ به‌عنوان ورودی در تابع g می‌رود. در این حالت باید دقت داشته باشید، xهایی قابل قبول است که $f(x)$ در دامنهٔ تابع g قرار داشته باشد:



دامنهٔ تابع مرکب: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

مثال با فرض توابع:

$f=\{(-1,0),(0,2),(1,4)\}$ و $g=\{(1,-2),(2,0),(3,-1)\}$، تابع مرکب fog به‌صورت زیر است: (مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

$$\begin{cases}(fog)(1)=f(g(1))=f(-2) : \text{تعریف نشده}\\ (fog)(2)=f(g(2))=f(0)=2\\ (fog)(3)=f(g(3))=f(-1)=0\end{cases}$$

$$fog=\{(2,2),(3,0)\}$$

نمونه توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^2-1$ مفروض‌اند. دامنه و ضابطهٔ توابع مرکب fog و gof را بیابید.

پاسخ: می‌دانیم $D_f=[0,+\infty)$ و $D_g=\mathbb{R}$؛ داریم:

تابع مرکب fog:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}\mid (x^2-1)\geq 0\}$$
$$x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow |x|\geq 1$$
$$\Rightarrow D_{fog}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

ضابطه: $(fog)(x)=f(g(x))=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x^2-1}$

تابع مرکب gof:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$
$$=\{x\geq 0\mid \sqrt{x}\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$$

ضابطه: $(gof)(x)=g(f(x))=(f(x))^2-1=x-1$

سیاه‌چاله

دامنهٔ توابع مرکب را حتماً بر اساس تعریف به‌دست آورید نه بر اساس ضابطه! در تمرین قبل، ضابطهٔ gof به‌صورت $(gof)(x)=x-1$ به‌دست آمد که دامنهٔ آن بر اساس ضابطه برابر با $\mathbb{R}$ می‌شود؛ در صورتی که بر اساس تعریف، دامنهٔ آن به‌صورت $[0,+\infty)$ محاسبه شد.

نمونه تابع مرکب $f(g(x))=2x^2+4x-3$ مفروض است.

الف) اگر $f(x)=2x-1$، ضابطهٔ g را به‌دست آورید.

ب) اگر $g(x)=2x+1$، ضابطهٔ f را به‌دست آورید.

(مشابه تمرین ۳ ص ۲۲ کتاب درسی)

پاسخ: الف) در ضابطهٔ تابع $f(x)$، به‌جای x، عبارت $g(x)$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=2x-1\xrightarrow{x\to g(x)}f(g(x))=2g(x)-1 \\ f(g(x))=2x^2+4x-3 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 2g(x)-1=2x^2+4x-3$$
$$\Rightarrow 2g(x)=2x^2+4x-2\Rightarrow g(x)=x^2+2x-1$$

ب) ضابطهٔ تابع $g(x)$ را برابر t در نظر گرفته و x را برحسب t می‌یابیم و در ضابطهٔ $f(g(x))$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$g(x)=2x+1=t\Rightarrow x=\frac{t-1}{2}$$
$$f(g(x))=2x^2+4x-3\Rightarrow f(t)=2(\frac{t-1}{2})^2+4(\frac{t-1}{2})-3$$
$$=\frac{t^2}{2}+t-\frac{9}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{2}+x-\frac{9}{2}$$

حال به دو سؤال مهم پاسخ می‌دهیم:

۱- اگر بتوانیم تابعی را (در صورت امکان) به صورت ترکیب دو تابع بنویسیم، آیا این ترکیب منحصر به فرد است؟

پاسخ: خیر، به‌عنوان مثال، تابع $y=\sqrt[3]{x+1}$ را به دو حالت زیر به‌صورت ترکیب دو تابع می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x}, g(x)=x+1\Rightarrow (fog)(x)=\sqrt[3]{x+1} \\ f(x)=\sqrt[3]{x-1}, g(x)=x+2\Rightarrow (fog)(x)=\sqrt[3]{x+1} \end{cases}$$

۲- برای دو تابع نابرابر f و g $(f\neq g)$، آیا رابطهٔ $(fog)(x)=(gof)(x)$ می‌تواند برقرار باشد؟

پاسخ: بله، به‌عنوان مثال، برای دو تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ و $g(x)=x^3$ داریم:

$$\begin{cases} (fog)(x)=\sqrt[3]{x^3}=x \\ (gof)(x)=(\sqrt[3]{x})^3=x \end{cases}\Rightarrow (fog)(x)=(gof)(x)$$

تبدیل و انتقال نمودار توابع

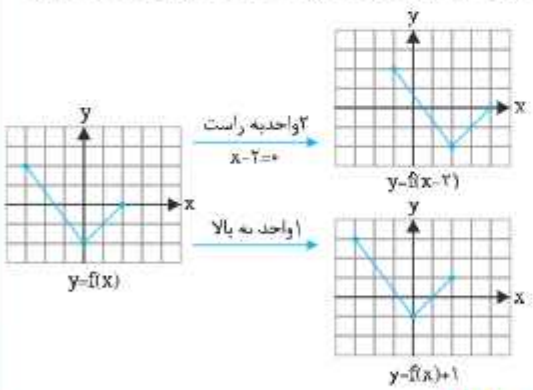
در سال دهم با رسم نمودار توابع $f(x+k)$ و $f(x)+k$ و در سال یازدهم با رسم نمودار توابع $kf(x)$ (و حالت خاص $-f(x)$) آشنا شدیم. امسال، رسم نمودار توابع $f(kx)$ را یاد می‌گیریم. اما قبل از آن مباحث سال گذشته را مرور می‌کنیم.

رسم نمودار $f(x+k)$

در سال گذشته یاد گرفتیم که برای رسم نمودار $f(x+k)$، ریشهٔ داخل پرانتز یعنی $x=-k$ را به‌دست آورده و با توجه به علامت آن، نمودار f را $(-k)$ واحد در راستای محور xها (راست یا چپ) حرکت می‌دهیم.

رسم نمودار $f(x)+k$

یاد گرفتیم که برای رسم نمودار $f(x)+k$، کافی است نمودار f را k واحد (با توجه به علامت آن) در راستای محور yها (بالا یا پایین) جابه‌جا کنیم.



رسم نمودار $kf(x)$

یاد گرفتیم که برای رسم نمودار $kf(x)$، عرض هر نقطه از نمودار تابع f را با **حفظ طول آن نقطه**، k برابر کنیم. در نتیجه با توجه به k داریم:

الف) $k>1$: نمودار تابع f در امتداد محور yها کشیده می‌شود. (انبساط عمودی)

ب) $0<k<1$: نمودار تابع f در امتداد محور yها فشرده می‌شود. (انقباض عمودی)

ج) $k<0$: ابتدا نمودار f نسبت به محور xها قرینه شده و سپس با ضریب $|k|$ به‌طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.