

هندسه (۱) دهم - دی ماه

رشته ریاضی (طبقه بندی شده)

آزمون شماره ۱

مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۷



هشتگ امتحان

آزمون

۱

پاسخنامه
۲۰

ردیف

جای

خالی

۱

۲

۳

پسند

پاسخ

۴

۵

۶

۷

۸

جای

خالی

۹

۱۰

۱۱

پسند

پاسخ

۱۲

۱۳

۱۴

۱۵

۱۶

۱۷

فصل ۱ صفحه درسیانه: ۳۹

هر زاویه خارجی مثلث، از هر زاویه داخلی غیرمجاورش است.

ارزش نقیض یک گزاره ارزش خود گزاره است.

به استدلالی که براساس نتیجه گیری منطقی بر پایه واقعیت هایی است که درستی آنها را پذیرفته ایم، می گویند.

روش رسم یک لوزی را که طول قطرهاش ۶ و ۱۰ باشد، با رسم شکل توضیح دهید. (محرران - مدرسه موحده - دی ۹۷)

الف) قضیه زیر را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید. (کرج - مدرسه مهدیه - دی ۹۷)

قضیه: «در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، ارتفاع نظیر آنها نیز برابر است.»

ب) نقیض گزاره «هر لوزی یک مربع است» را بنویسید.

برای گزاره های زیر، مثال نقض بیاورید.

الف) هر چهار ضلعی که دو محور تقارن داشته باشد، لوزی است.

ب) نقطه همرسی ارتفاع های هر مثلث، داخل آن است. (شیراز - مدرسه احسان - دی ۹۷)

ثابت کنید سه نیمساز داخلی هر مثلث، همبرس هستند. (محرران - مدرسه کمال - دی ۹۷)

با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید از یک نقطه غیر واقع بر یک خط نمی توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد. (محرران - مدرسه فرهنگیان - دی ۹۷)

فصل ۲ صفحه درسیانه: ۴۱

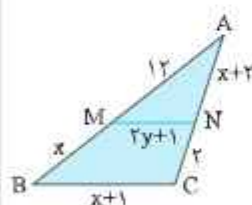
در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع، با عکس نسبت برابر است. (کرج - مدرسه مهدیه - دی ۹۷)

در هر مثلث متشابه، نسبت میانه های نظیر، برابر است. (کرج - مدرسه مهدیه - دی ۹۷)

هرگاه اندازه های سه ضلع مثلثی با اندازه های سه ضلع از مثلث دیگر باشند، آن دو مثلث متشابه اند.

اگر داشته باشیم $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{1}{6}$ ، آنگاه مقدار $x + y + z$ را به دست آورید.

در شکل مقابل $MN \parallel BC$ ، مقادیر x و y را بیابید. (محرران - مدرسه موحده - دی ۹۷)



به پار از قضیه تالس هر چه به پار از هر به کل استفاده کن.

ثابت کنید هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند، آن دو مثلث متشابه اند. (تبریز - مدرسه شاهد نوبالنسرا - دی ۹۷)

مطابق شکل روبه رو، یک تیر انتقال برق به ارتفاع ۱۵ متر بر اثر وزش باد خم شده است و در موقعیت

جدید، نوک آن از زمین ۱۲ متر فاصله دارد. می خواهیم با قراردادن یک تیر فلزی به طول ۸ متر، عمود

بر آن، آن را به طور موقت سر یا نگه داریم، پای این تیر فلزی را باید در چه فاصله ای از پای تیر چراغ برق

محکم کنیم؟ (تبریز - مدرسه شاهد نوبالنسرا - دی ۹۷)

در شکل زیر، مساحت چهارضلعی AFED برابر ۲۰ واحد، $AD = 2DC$ و $BF = FE = EC$ می باشد.

مساحت مثلث ABC را بیابید. (شیراز - مدرسه احسان - دی ۹۷)

مساحت مثلث های هم ارتفاع رو مقایسه کن.

ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی دو پاره خطی است که روی وتر پدید می آورد. (محرران - مدرسه موحده - دی ۹۷)

جمع نمره

۲۰

موفق باشید.

دی ماه هشتگ امتحان

هندسه (۱) دهم - دی ماه

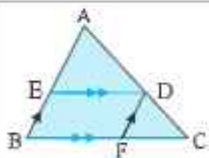
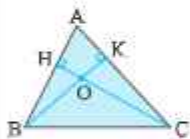
رشته ریاضی (طبقه بندی شده)



هشتاد امتحان

مدت زمان: ۱۰۰ دقیقه
تعداد سؤال: ۱۸

ردیف	نمره	سوال
۱	۱/۵	مجموع زاویه های هر چهار ضلعی محدب 360° است. (نظر - مدرسه کمال - دی ۹۵)
۲	۱/۵	اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم، به آنچه حاصل می شود، می گویند.
۳	۱/۵	استدلال و استنتاجی، انواع استدلال هستند.
۴	۱	روش رسم نیمساز یک زاویه را با رسم شکل به طور کامل شرح دهید.
۵	۱/۵	درون زاویه xOy چند نقطه می توان یافت که از Ox به فاصله ۲ و از Oy به فاصله ۳ باشد؟ (با رسم شکل، به طور کامل شرح دهید.)
۶	۱/۵	اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، ثابت کنید زاویه روبه روی ضلع بزرگ تر، از زاویه روبه روی ضلع کوچک تر، بزرگ تر است.
۷	۱	گزاردهای زیر را اثبات یا رد کنید. (نظر - مدرسه فرزانگان ۴ - دی ۹۵)
۸	۱/۵	الف) چند ضلعی که همه زاویه های آن برابر باشند، منتظم است. ب) هر زاویه خارجی یک چندضلعی، از هر زاویه داخلی آن بزرگ تر است.
۹	۱/۵	الف) نقیض گزاره زیر را بنویسید. «در هر مثلث قائم الزاویه، مجموع دو زاویه غیر قائمه برابر با 90° است.» (نظر - مدرسه کمال - دی ۹۵)
۱۰	۱/۵	ب) عکس قضیه زیر را بیان کنید. «در هر مثلث، اگر اندازه دو میانه نظیر ساق ها برابر باشند، آن مثلث متساوی الساقین است.» (نظر - مدرسه کمال - دی ۹۵)
۱۱	۱/۵	در مثلث ABC ، ضلع AB از ضلع AC کوچک تر است. اگر محل برخورد ارتفاع های نظیر رأس B و C را O بنامیم، نشان دهید طول BO از طول CO کوچک تر است.
۱۲	۱/۵	هرگاه اندازه ارتفاع های دو مثلث برابر باشند، نسبت آنها برابر با نسبت اندازه قاعده هایی است که این ارتفاع ها بر آنها وارد شده است. (نظر - مدرسه کمال - دی ۹۵)
۱۳	۱/۵	هرگاه دو مثلث متشابه باشند، نسبت مساحت های آنها برابر با است.
۱۴	۱/۵	هر دو n ضلعی منتظم همواره با هم هستند. (اصفهان - مدرسه کمال دانشگاه صنعتی - دی ۹۵)
۱۵	۱/۵	در شکل مقابل $ED \parallel BF$ و $EB \parallel DF$ است، ثابت کنید: $\frac{BE}{AB} + \frac{BF}{BC} = 1$
۱۶	۱/۵	ثابت کنید در هر دو مثلث متشابه، نسبت محیط های متناظر، برابر با نسبت تشابه است.
۱۷	۱/۵	در مثلث ABC ، نقطه D روی ضلع BC چنان قرار دارد که $\widehat{B} = \widehat{CAD}$. اگر $AC = 4$ و $BD = 6$ ، طول BC را به دست بیاورید. (نظر - مدرسه فرزانگان ۲ - دی ۹۷)
۱۸	۱/۵	در دوزنقه ای اندازه قاعده ها ۹ و ۴ و طول ساق ها ۵ و ۶ است، محیط مثلثی که امتداد ساق های بیرون دوزنقه تشکیل می دهد، چقدر است؟ (اصفهان - مدرسه کمال دانشگاه صنعتی - دی ۹۵)
۱۹	۷	در مثلث ABC ، $A = 90^\circ$ و AH ارتفاع است. اگر $BH = 9$ و $AC = 2\sqrt{13}$ ، طول AB و AH را محاسبه کنید.
۲۰	۱/۵	عکس قضیه فیثاغورس را بنویسید و اثبات کنید. (نظر - مدرسه فرزانگان ۴ - دی ۹۵)
جمع نمره	۲۰	موفق باشید.



مثلث های متشابه رو پیدا کن و نسبت اضلاع رو بنویس.



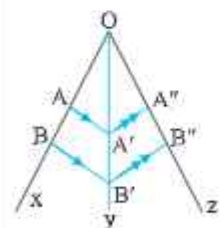
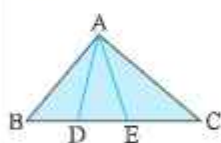
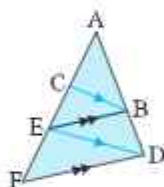
هشتگ امتحان

الف) جاهای خالی زیر را کامل کنید.

- ۱ اگر در مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر رسم شود دو مثلث ایجاد خواهد شد.
- ۲ اگر هر نقطه از عمود منصف را به دو سر یارده خط وصل نماییم یک مثلث خواهیم داشت.
- ۳ در هر مثلث ضلع روبه رو به زاویه بزرگ تر، از ضلع روبه رو به زاویه کوچک تر است.
- ۴ اگر در مثلثی اندازه دو زاویه 48° و 30° باشد، محل هم‌مرسی ارتفاع‌ها مثلث است.

ب) به سؤال‌های زیر پاسخ کامل دهید.

- ۵ روش رسم مربعی به قطر ۴ را به طور کامل بیان کنید. $1/5$
- ۶ متوازی الاضلاعی رسم کنید که دو ضلعش ۵ و ۳ باشند و طول یک قطر آن ۶ باشد. $1/5$
- ۷ ثابت کنید ارتفاع‌های مثلث هم‌مرس‌اند. $1/5$
- ۸ در مثلث ABC با رسم نیم‌ساز A ثابت کنید $AB + AC > BC$. 2
- ۹ به روش برهان خلف در مثلث ABC ثابت کنید اگر $AB \neq AC$ ، آنگاه $\hat{B} \neq \hat{C}$. $1/5$
- ۱۰ اگر $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ باشد، حاصل $\sqrt{\frac{ra^2 + sc^2}{rb^2 + sd^2}}$ را بیابید. 1
- ۱۱ قضیه تالس و عکس آن را بیان و ثابت کنید. $1/5$
- ۱۲ در شکل زیر ثابت کنید $AE^2 = AC \times AF$. $1/5$

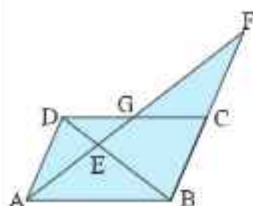


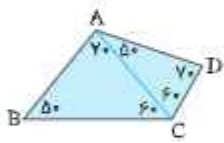
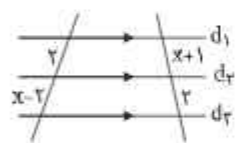
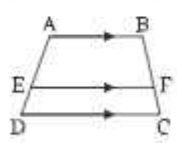
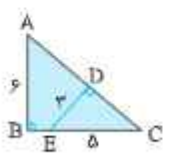
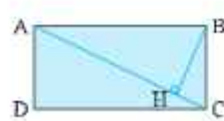
- ۱۳ در شکل مقابل مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{BC}{DE}$ و $\frac{DE}{BD}$ را به دست آورید. $1/5$

- ۱۴ در شکل زیر سه نیم خط هم‌مرس Ox، Oy و Oz را در نظر بگیرید. اگر $AA' \parallel BB'$ و $AA'' \parallel BB''$ ، آنگاه ثابت کنید: $1/5$

- ۱۵ اندازه اضلاع مثلثی ۶، ۸ و ۱۰ است. اگر این مثلث با مثلثی به محیط ۷۲ مشابه باشد، مساحت مثلث دوم را بیابید. $1/5$

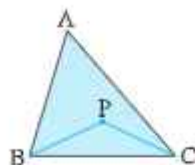
- ۱۶ در متوازی الاضلاع ABCD از رأس A خطی رسم می‌کنیم که قطر BD را در E و اضلاع BC و CD یا امتداد آنها را به ترتیب در F و G قطع کند. ثابت کنید AE واسط هندسی EG و EF است. $1/5$



ردیف	نمره	سؤال
		الف، جاهای خالی را با کلمه (عدد) مناسب پر کنید.
۱	۰/۵	درون هر مثلث محل برخورد از هر سه ضلع به یک فاصله است.
۲	۰/۵	در مثلث قائم الزاویه، محل هم‌رسی ارتفاع‌ها، است.
۳	۰/۲۵	در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت وارد بر آنها برابر است.
۴	۰/۵	میانگین هندسی دو عدد $4\sqrt{3}$ و $3\sqrt{3}$ برابر با است.
۵	۰/۵	اگر $\frac{1-2x}{3-2y} = \frac{x}{y}$ ، آنگاه $\frac{x}{y}$ برابر با است.
		ب، به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.
۶	۱	وتری مانند AB از یک دایره در نظر بگیرید. وضعیت عمود منصف دایره و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟
۷	۱	شکل مقابل، کماتی از دایره است. مرکز این دایره را تعیین کنید.
۸	۱/۵	در مثلث ABC، نیمساز داخلی زاویه B و نیمساز خارجی زاویه C در نقطه D متقاطع‌اند. ثابت کنید اندازه زاویه D، نصف زاویه A است.
۹	۱	عکس قضیه زیر را بنویسید و سپس آن را به صورت یک قضیه دو شرحی بنویسید. «در هر مثلث قائم الزاویه، عمود منصف ضلع‌ها در وسط وتر هم‌رس هستند.»
۱۰	۱/۵	نقطه O درون مثلث ABC است. ثابت کنید $AB + AC > OB + OC$.
۱۱	۱/۵	در شکل مقابل، پنج پاره خط دیده می‌شود. این پاره خط‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.
		
۱۲	۱	اگر داشته باشیم $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ ، عدد a چه کسری از $a+b+c$ است؟
۱۳	۱/۵	در شکل مقابل، سه خط d_1 ، d_2 و d_3 موازی هستند. مقدار x را محاسبه کنید.
		
۱۴	۷	در ذوزنقه زیر $AB \parallel EF \parallel CD$ و $\frac{AE}{ED} = 2$. اگر $AB = m$ و $CD = n$ باشد، اندازه EF را بر حسب m و n پیدا کنید.
		
۱۵	۱/۵	در شکل مقابل، با توجه به اندازه‌های داده شده طول ضلع BC را بیابید.
		
۱۶	۷	ثابت کنید هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.
۱۷	۱	در دو مثلث متشابه، نسبت نیمسازهای متناظر برابر $\frac{2}{5}$ است. اگر محیط مثلث کوچک‌تر برابر ۱۰ سانتی‌متر باشد، محیط مثلث بزرگ‌تر را بیابید.
۱۸	۱/۵	در شکل مقابل، اگر $BH = 6$ و $AH = 9$ باشد، مساحت مستطیل را بیابید.
		
۲۰	جمع نمره	موفق باشید.

فصل ۱

صفحه درسی: ۳۹

نقطه P نقطه ای دلخواه درون مثلث ABC است. ثابت کنید $\hat{P} > \hat{A}$.

به روش برهان خلف، نشان دهید اگر یک مثلث دارای دو ارتفاع برابر باشد، آن مثلث متساوی الساقین است.

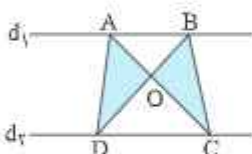
نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) پنج ضلعی محدبی وجود دارد که ۴ زاویه قائمه دارد.

ب) هیچ چهارضلعی زاویه بزرگتر از زاویه قائمه ندارد.

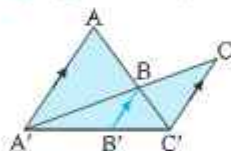
فصل ۲

صفحه درسی: ۴۱

در شکل زیر $d_1 \parallel d_2$ است. ثابت کنید $S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBC}$. (اصول - مدرسه کمال صنعتی - دی ۹۵)اگر $\frac{a}{b} = \frac{r}{r}$ باشد، حاصل $\frac{ra + rb}{a + rb}$ را به دست آورید. (شیراز - مدرسه اجلاس - دی ۹۷)در شکل زیر AA' ، BB' و CC' موازی هستند. درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

۵ و ۶ بار از قضیه تالس به کار استفاده کنید.

(شیراز - مدرسه اجلاس - دی ۹۷)



$$\frac{1}{AA'} + \frac{1}{CC'} = \frac{1}{BB'}$$

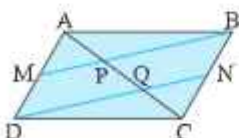
فصل ۳

صفحه درسی: ۴۶

ثابت کنید هر چهارضلعی که قطرهاش یکدیگر را نصف می کنند، متوازی الاضلاع است. (قزوین - مدرسه چهارمیان - خرداد ۹۸)

ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر، نصف وتر است. (اصول - مدرسه انزلی - خرداد ۹۶)

در متوازی الاضلاع ABCD، M و N به ترتیب وسط های ضلع های AD و BC هستند. ثابت

کنید خط های MB و DN موازی اند و به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.

نشان دهید میانه های هر مثلث، آن مثلث را به شش مثلث هم مساحت تقسیم می کنند. (اصول - مدرسه آفرین - خرداد ۹۷)

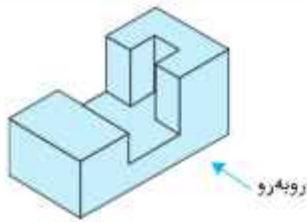
ثابت کنید اگر وسط های سه ضلع مثلثی را به هم وصل کنیم، چهار مثلث هم نهشت پدید می آید.

فصل ۴

صفحه درسی: ۴۹

نقاط A، B و C روی صفحه P و نقطه D روی این صفحه قرار ندارد. خط هایی که از رویه روی این نقاط می گذرد، را رسم می کنیم. خطوط متناظر را مشخص کنید.

۱۳ نمای بالا، روبه‌رو و چپ شکل زیر را رسم کنید. (تقریب - مدرسه سیدالشهدا - خرداد ۹۸)

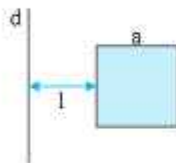


۱۴ دو استوانه مطابق شکل روی هم قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای به شکل عمودی با هر دوی این استوانه‌ها برخورد کند، سطح مقطع حاصل به چه شکل خواهد بود؟ (تصویر - نمونه دولتی ۱۷ شهریار - خرداد ۹۸)



۱۵ در یک مکعب به طول یال ۸، مساحت بزرگ‌ترین سطح مستطیلی چقدر است؟ (تصویر - مدرسه خراسان - خرداد ۹۷)

۱۶ الف) مربعی به ضلع a را حول خط d دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.



ب) مستطیلی را حول عمود منصف طول آن دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.

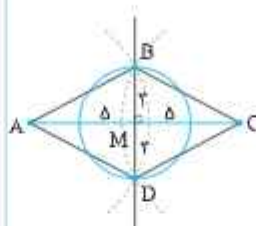
(تقریب - مدرسه پاسداران - خرداد ۹۸)

۱- بزرگتر

۲- مخالف

۳- استدلال استنتاجی

۴- ابتدا قطر AC را به طول ۱۰ و سپس عمود منصف آن را رسم می‌کنیم.



محل برخورد AC و عمود منصفش را

M می‌نامیم. حالا به مرکز M، دایره‌ای به

شعاع ۳ رسم می‌کنیم عمود منصف را در

نقاط D و B قطع کند. D و B را به A و C

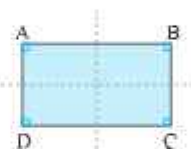
وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABCD یک

لوزی به قطرهای ۶ و ۱۰ است.

۵- الف) «در هر مثلث، دو ضلع برابر هستند، اگر و تنها اگر ارتفاع نظیر

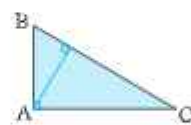
آنها برابر باشند.» ب) «چنین نیست که هر لوزی، یک مربع باشد» یا به

عبارت دیگر، «یک لوزی وجود دارد که مربع نیست».



۶- الف) مثال نقض این گزاره مستطیل است

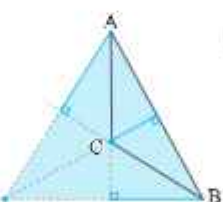
که دو محور تقارن دارد، اما لوزی نیست.



ب) مثال نقض این گزاره، هر مثلث قائم الزامیه

است که نقطه هم‌مرسی ارتفاع‌هایش روی

رأس قائمه قرار دارد.

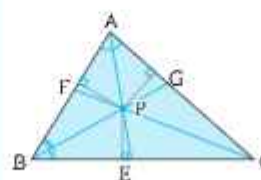


یا مثلثی با زاویه منفرجه که نقطه هم‌مرسی

ارتفاع‌های آن خارج مثلث قرار دارد.

۷- می‌خواهیم نشان دهیم نیمسازهای زاویه‌ای داخلی مثلث ABC

هم‌رس هستند.



نیمسازهای رأس‌های A و B را رسم

می‌کنیم تا در نقطه P یکدیگر را قطع

کنند. از نقطه P به سه ضلع عمود

می‌کنیم و P را به رأس C وصل می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} AP \text{ نیمساز است} &\Rightarrow PF = PG \\ BP \text{ نیمساز است} &\Rightarrow PF = PE \end{aligned} \right\} \Rightarrow PE = PG$$

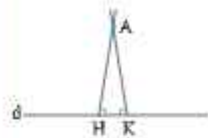
PE = PG یعنی نقطه P از دو ضلع زاویه C به یک فاصله است. پس

نقطه P روی نیمساز زاویه C قرار دارد؛ یعنی PC نیمساز زاویه C است.

بنابراین نیمسازهای سه زاویه داخلی هم‌رس هستند.

۸- فرض کنیم حکم مسئله غلط است؛ یعنی از نقطه A غیر واقع بر خط

d می‌توان دو عمود AH و AK را بر خط d رسم کرد.



در این صورت مجموع زاویه‌های داخلی

مثلث AHK بیشتر از 180° می‌شود که

تناقضی آشکار است. بنابراین فرض خلف

باطل است.

۹- ارتفاع‌ها

۱۰- نسبت تشابه

۱۱- متناسب

۱۲- با استفاده از ویژگی‌های تناسب داریم:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x+y+z}{3+4+5} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x+y+z}{12} = \frac{1}{6} \Rightarrow x+y+z=2$$

۱۳- برای به دست آوردن مقدار x از تالس جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{12}{x} = \frac{x+2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 24 \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x+6)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 & \times \\ x = 4 & \checkmark \end{cases}$$

چون با طول باره‌ها سر و کار داریم، $x = -6$ قابل قبول نیست.

بنابراین $x = 4$.

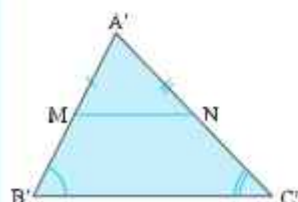
حالا برای به دست آوردن مقدار y از تالس جزء به کل استفاده می‌کنیم.

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{2y+1}{12+x} = \frac{2y+1}{16} \Rightarrow \frac{2y+1}{12+x} = \frac{2y+1}{16}$$

$$2y+1 = \frac{12 \times 16}{16} = 12 \Rightarrow 2y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{2}$$

۱۴- فرض کنیم در مثلث‌های ABC و A'B'C' داشته باشیم $C = C'$ و $B = B'$.

می‌خواهیم نشان دهیم این دو مثلث متشابه هستند.



روی ضلع‌های A'C' و A'B'

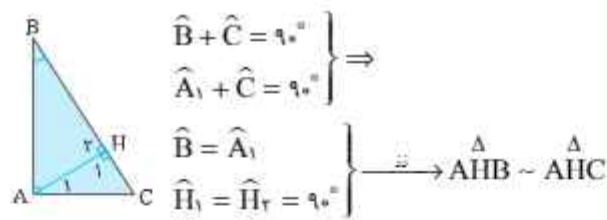
باره‌خط‌های AM و AN را

به ترتیب هم‌اندازه AB و AC جدا

می‌کنیم.

مرحله اول: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}' + \hat{B}' + \hat{C}' = 180^\circ$ و $\hat{C} = \hat{C}'$ ، $\hat{B} = \hat{B}'$

بنابراین $\hat{A} = \hat{A}'$



حالا با نوشتن نسبت تشابه این دو مثلث به مطلوب مسئله می‌رسیم.

$$\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \times CH$$

آزمون شماره ۴ نوبت اول دی ماه

۱- داخلی

۲- عکس قضیه

۳- استقرایی

۴- برای رسم نیمساز زاویه $\widehat{xOy}$.

کمانی به مرکز O رسم می‌کنیم تا دو

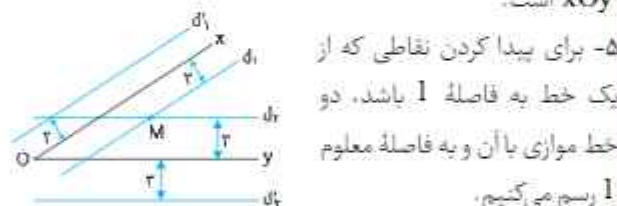
ضلع زاویه را در نقاط A و B قطع

کند.

حالا به مرکز A و B، دو کمان با شعاع برابر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در

نقطه W قطع کنند. O را به W وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویه

$\widehat{xOy}$ است.



بنابراین دو خط موازی با Ox و به فاصله ۲ از آن و دو خط موازی با Oy و به فاصله ۳ از آن رسم می‌کنیم. محل برخورد d_1 و d_2 که درون زاویه

قرار دارد، یعنی نقطه M تنها جواب مسئله است.

۶- در مثلث ABC، $AC > AB$ ، می‌خواهیم ثابت کنیم $\widehat{B} > \widehat{C}$.

B' را روی AC طوری انتخاب می‌کنیم که $AB = AB'$ ، بنابراین داریم:

$$AB = AB' \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}'_1 \quad (1)$$

$$\widehat{B}'_1 = \widehat{B}_1 + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{B}'_1 > \widehat{C} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \widehat{B}_1 > \widehat{C}, \quad \widehat{B} > \widehat{B}_1 \Rightarrow \widehat{B} > \widehat{C}$$

۷- الف) این گزاره نادرست است؛ مستطیل، مثال نقضی برای این گزاره است.

ب) این گزاره نادرست است؛ مثلث زیر، مثال نقض این گزاره است. زیرا

زاویه خارجی B از زاویه داخلی B کوچک‌تر است.

۸- الف) این گزاره نادرست است؛ مستطیل، مثال نقضی برای این گزاره است.

ب) این گزاره نادرست است؛ مثلث زیر، مثال نقض این گزاره است. زیرا

زاویه خارجی B از زاویه داخلی B کوچک‌تر است.

۹- الف) این گزاره نادرست است؛ مستطیل، مثال نقضی برای این گزاره است.

ب) این گزاره نادرست است؛ مثلث زیر، مثال نقض این گزاره است. زیرا

زاویه خارجی B از زاویه داخلی B کوچک‌تر است.

۱۰- الف) این گزاره نادرست است؛ مستطیل، مثال نقضی برای این گزاره است.

ب) این گزاره نادرست است؛ مثلث زیر، مثال نقض این گزاره است. زیرا

زاویه خارجی B از زاویه داخلی B کوچک‌تر است.

مرحله دوم: دو مثلث ABC و A'MN به حالت فرض هم‌نهشت

هستند، زیرا: $\widehat{A}' = \widehat{A}$ و $A'N = AC$ ، $A'M = AB$ ، بنابراین

$$MN = BC \quad \widehat{M} = \widehat{B} \quad \widehat{N} = \widehat{C}$$

مرحله سوم: از $\widehat{M} = \widehat{B}$ و $\widehat{N} = \widehat{C}$ نتیجه می‌گیریم $\widehat{M} = \widehat{B}'$ ، یعنی

$$MN \parallel B'C'$$

مرحله چهارم: طبق قضیه اساسی تشابه، $\triangle A'MN \sim \triangle A'B'C'$ و در

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

نتیجه

۱۵- برای مسئله شکلی رسم می‌کنیم.

دو مثلث ABC و BDE به حالت

برابری دو زاویه متشابه هستند؛ زیرا

$$\widehat{C} = \widehat{E} = 90^\circ \quad \text{و زاویه B بین آنها}$$

مشترک است.

حالا برای به دست آوردن طول BD از نسبت تشابه این دو مثلث

استفاده می‌کنیم.

$$\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow \frac{15}{12} = \frac{BD}{12} \Rightarrow BD = \frac{15 \times 12}{12} = 15m$$

۱۶- از A به E وصل می‌کنیم. قرار می‌دهیم: $S_{\triangle AED} = S_{\triangle EDC}$

مثلث‌های AED و EDC دارای ارتفاع مشترک EH هستند، پس:

$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle EDC}} = \frac{AD}{DC} = \frac{2DC}{DC} = 2$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AED} = 2S_{\triangle EDC} = 2S$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AEC} = S_{\triangle AED} + S_{\triangle EDC} = 2S + S = 3S$$

از طرفی می‌توان ارتفاع مشترک مثلث‌های AFE و ABF را AH' و ارتفاع مشترک مثلث‌های AFE و AEC را AE' در نظر گرفت که دارای قاعده‌های مساوی هستند؛ پس:

$$S_{\triangle ABF} = S_{\triangle AFE} = S_{\triangle AEC} = 2S_{\triangle AED} = 2S$$

$$S_{\triangle AFED} = S_{\triangle AFE} + S_{\triangle AED} = 2S + 2S = 4S$$

$$\Rightarrow 4S = 20 \Rightarrow S = 5$$

در نتیجه:

$$S_{\triangle ABC} = 2S + 2S + 2S + S = 9S = 9 \times 5 = 45$$

۱۷- در مثلث قائم‌الزاویه مقابل، ارتفاع وارد بر وتر را رسم می‌کنیم.

می‌خواهیم نشان دهیم دو مثلث AHC و AHB متشابه‌اند.

۱۸- الف) این گزاره نادرست است؛ مستطیل، مثال نقضی برای این گزاره است.

ب) این گزاره نادرست است؛ مثلث زیر، مثال نقض این گزاره است. زیرا

زاویه خارجی B از زاویه داخلی B کوچک‌تر است.

۱۹- الف) این گزاره نادرست است؛ مستطیل، مثال نقضی برای این گزاره است.

ب) این گزاره نادرست است؛ مثلث زیر، مثال نقض این گزاره است. زیرا

زاویه خارجی B از زاویه داخلی B کوچک‌تر است.

۲۰- الف) این گزاره نادرست است؛ مستطیل، مثال نقضی برای این گزاره است.

ب) این گزاره نادرست است؛ مثلث زیر، مثال نقض این گزاره است. زیرا

زاویه خارجی B از زاویه داخلی B کوچک‌تر است.

۲۱- الف) این گزاره نادرست است؛ مستطیل، مثال نقضی برای این گزاره است.

ب) این گزاره نادرست است؛ مثلث زیر، مثال نقض این گزاره است. زیرا

زاویه خارجی B از زاویه داخلی B کوچک‌تر است.

فصل ۱: ترسیم‌های هندسی و استدلال

درس ۱: ترسیم‌های هندسی

در ترسیم هندسی، تنها از خط‌کش و برگار استفاده می‌کنیم.



۱- برای پیدا کردن نقاط با فاصله ۳ سانتی متر از نقطه ثابت O، دهانه برگار را به اندازه ۳ سانتی متر باز کرده و دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ سانتی متر رسم می‌کنیم.

۲- برای پیدا کردن نقاطی که از خط ثابت d به فاصله ۴ سانتی متر باشند، دو خط موازی خط d در دو طرف آن به فاصله ۴ سانتی متر رسم می‌کنیم.

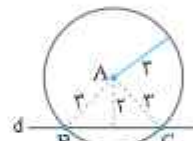
۳- در شکل زیر، فاصله نقطه A از خط d برابر ۲ است.

الف) نقاطی روی خط d بیابید که به فاصله ۳ سانتی متر از نقطه A باشند.
ب) نقاطی روی خط d بیابید که به فاصله ۲ سانتی متر از نقطه A باشند.
ج) نقاطی روی خط d بیابید که به فاصله ۱ سانتی متر از نقطه A باشند.

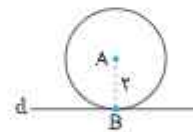


پاسخ: الف) دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳

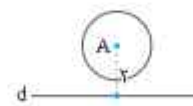
سانتی متر رسم می‌کنیم. چون $3 > 2$ است، دایره خط d را در دو نقطه قطع می‌کند و مسئله دو جواب دارد. (نقاط B و C)



ب) دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ سانتی متر رسم می‌کنیم. چون $2 = 2$ است، دایره خط d را فقط در یک نقطه قطع می‌کند؛ یعنی به خط d مماس است و مسئله یک جواب دارد. (نقطه B)

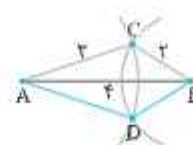


ج) دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱ سانتی متر رسم می‌کنیم. چون $1 < 2$ است، دایره خط d را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند و مسئله جواب ندارد.



۴- مثلی به طول اضلاع ۳، ۲ و ۴ رسم کنید.

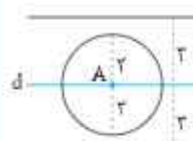
پاسخ: ابتدا پاره خط AB را به طول ۴ رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و شعاع ۳ سانتی متر دایره دیگری رسم می‌کنیم و در نهایت به مرکز B و شعاع ۲ سانتی متر دایره‌ای رسم می‌کنیم.



این دو دایره یکدیگر را در نقاط C و D قطع می‌کنند. مثلث‌های ACB و ADB هر دو جواب‌های مسئله هستند.

۵- هنگام رسم مثلث، به طول اضلاع داده شده دقت کنید. اگر مجموع هر دو ضلع مثلث از ضلع سوم بزرگ‌تر نباشد، نمی‌توان چنین مثلی رسم کرد. مثلاً مثلی با اضلاع ۲، ۱ و ۳ وجود ندارد، چون $2 + 1 = 3$ که مقداری بزرگ‌تر از ۳ نیست.

۶- خط d و نقطه A را روی آن در نظر بگیرید. نقاطی مانند P بیابید که فاصله آنها از خط d و نقطه A به ترتیب ۳ و ۲ باشد.



پاسخ: به مرکز A و شعاع ۲ دایره‌ای رسم می‌کنیم. سپس، دو خط موازی خط d و به فاصله ۳ از آن رسم می‌کنیم. این دو خط، دایره را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند، پس مسئله جواب ندارد.

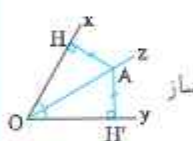
برخی خواص نیمساز و ترسیم آن

به نیم خطی که از رأس زاویه گذشته و آن را به دو زاویه برابر تقسیم می‌کند، نیمساز می‌گویند.

۷- اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

همین طور اگر نقطه‌ای به فاصله یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.

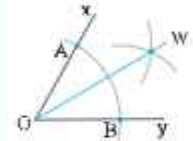
به نقطه A در شکل مقابل توجه کنید.



روی نیمساز $A \leftrightarrow AH = AH'$

روش رسم نیمساز

برای رسم نیمساز زاویه xOy، کمانی به مرکز O رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در نقاط A و B قطع کند.



حالا به مرکز A و B و شعاع‌های برابر دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه W قطع کنند. O را به W وصل می‌کنیم. OW نیمساز زاویه xOy است.

برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

به خطی که بر یک پاره خط عمود است و از وسط آن می‌گذرد، عمودمنصف آن پاره خط می‌گویند.

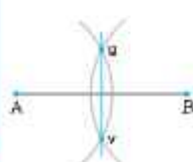
۸- اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است. همین طور اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار دارد. نقطه A را در شکل مقابل ببینید.



$A \leftrightarrow AB = AC$ روی عمودمنصف BC

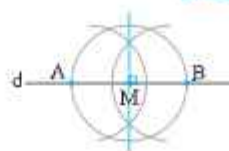
روش رسم عمودمنصف

برای رسم عمودمنصف پاره خط AB، دو کمان به شعاع بزرگ‌تر از نصف AB به مرکز A و B رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های u و v قطع کنند. u و v را به هم وصل می‌کنیم. uv عمودمنصف AB است.





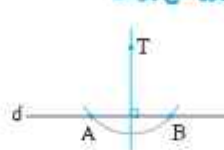
رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن



خط d و نقطه M روی آن را، مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید، می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

برای این منظور به مرکز M کمانی دلخواه رسم می‌کنیم تا خط d را در نقاط A و B قطع کند. سپس عمود منصف AB را رسم می‌کنیم. این عمود منصف، همان خطی است که از نقطه M گذشته و بر خط d عمود است.

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن



خط d و نقطه T غیرواقع بر آن را مانند شکل مقابل در نظر بگیرید، می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

برای این منظور، به مرکز T کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه A و B قطع کند. سپس، عمود منصف AB را رسم می‌کنیم. چون $TA = TB$ پس عمود منصف AB خطی است که از T گذشته و بر d عمود است.

رسم خط موازی یک خط از نقطه‌ای غیرواقع بر آن



خط d و نقطه T خارج آن مفروض است. می‌خواهیم خطی موازی خط d رسم کنیم که از نقطه T بگذرد. ابتدا از نقطه T خط d' را عمود بر خط d رسم می‌کنیم.

در آخر از نقطه T خط d'' را عمود بر خط d' می‌کشیم. d'' موازی خط d است. (زیرا دو خط عمود بر یک خط موازی هستند.)

تمرین ۱۰۱: متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول اضلاعش ۳ و ۵ باشد و طول یکی از قطرهایش ۷ باشد.

پاسخ: می‌خواهیم متوازی الاضلاع $ABCD$ را با شرایط داده شده رسم کنیم. فرض کنیم $AB = 5$ ، $BC = 3$ و $AC = 7$ باشد. ابتدا مثلث ABC را با طول اضلاع ۵، ۳ و ۷ رسم می‌کنیم. با توجه به اینکه اضلاع مقابل در متوازی الاضلاع موازی هستند، از نقطه C خطی موازی AB و از نقطه A خطی موازی BC رسم می‌کنیم. نقطه برخورد را D می‌نامیم. چهارضلعی حاصل، متوازی الاضلاع خواسته شده است.

درس ۲: استدلال

ابتدا به تعریف دو نوع استدلال می‌پردازیم:

استدلال استقرایی: در این نوع استدلال، از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت به یک نتیجه کلی می‌رسیم. یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». مثلاً اگر فردی با مشاهده اینکه سه نفر از افراد یک کلاس پرسپولیسی هستند، نتیجه‌گیری کند که همه افراد آن کلاس پرسپولیسی هستند، از استدلال استقرایی استفاده کرده است.

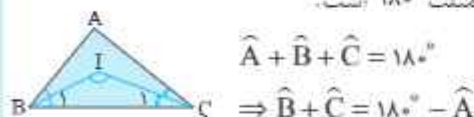
تمرین ۱۰۲: در استدلال استقرایی نمی‌توان به نتیجه گرفته شده مطمئن بود.

استدلال استنتاجی: این نوع استدلال، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم. این واقعیت‌ها در ریاضی، می‌توانند قضیه‌هایی باشند که قبلاً درستی آنها اثبات شده است.

تمرین ۱۰۳: در مثلث ABC ، نیمساز زاویه‌های داخلی B و C را رسم

می‌کنیم، به روش استدلال استنتاجی ثابت کنید $I = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$.

پاسخ: برای حل این مسئله از این واقعیت استفاده می‌کنیم که مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

حالاً در مثلث IBC داریم:

$$\hat{I} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{I} = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1)$$

$$= 180^\circ - (90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}) = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

گزاره و نقیض گزاره

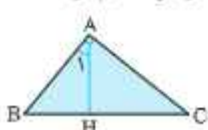
گزاره: یک جمله خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. مثلاً «مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.» یک گزاره درست و « $2 < 3$ » یک گزاره نادرست است.

تمرین ۱۰۴: جمله‌های امری، سؤالی، تعجبی گزاره نیستند، زیرا درستی یا نادرستی آنها به طور قطعی مشخص نیست.

نقیض یک گزاره: نقیض یک گزاره، گزاره‌ای است که ارزش آن مخالف آن گزاره است. مثلاً نقیض گزاره « a از b بزرگ‌تر است.» به صورت «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر است» یا معادل آن « a از b کوچک‌تر یا با b برابر است» می‌باشد.

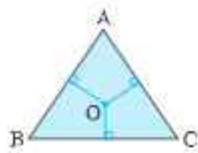
برهان خلف (برهان غیرمستقیم): اگر بخواهیم یک قضیه را با برهان خلف اثبات کنیم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- ۱- فرض می‌کنیم حکم نادرست است. ۲- نقیض حکم را به عنوان فرض می‌پذیریم. ۳- سعی می‌کنیم به یک تناقض با فرض یا یک گزاره غلط یا حتی غیرممکن برسیم. ۴- پس نقیض حکم نادرست و خود حکم درست است.

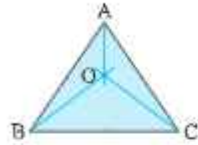


تمرین ۱۰۵: در مثلث مقابل $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{A}_1 \neq \hat{C}$ ثابت کنید AH نمی‌تواند

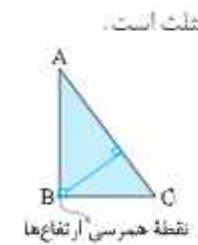
بر BC عمود باشد.



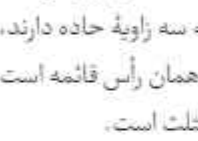
نقطه همرسی عمودمنصف‌ها
در مثلث‌هایی که سه زاویه حاده دارند، همواره داخل مثلث است اما در مثلث‌های قائم‌الزاویه، نقطه وسط وتر و در مثلث‌های که زاویه منفرجه دارند، خارج مثلث است.



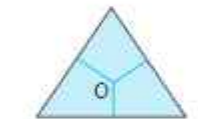
۲- تیمسازهای داخلی هر مثلث همرس هستند و نقطه همرسی آنها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.



نقطه همرسی ارتفاع‌ها
۳- ارتفاع‌های هر مثلث همرس هستند و نقطه همرسی آنها همیشه از سه رأس یا سه ضلع به یک فاصله نیست.

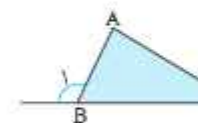


نقطه همرسی ارتفاع‌ها
در مثلث‌هایی که سه زاویه حاده دارند، داخل مثلث است اما در مثلث‌های قائم‌الزاویه، همان رأس قائمه است و در مثلث‌هایی که زاویه منفرجه دارند، خارج مثلث است.



۴- میانه‌های هر مثلث در نقطه‌ای داخل مثلث همرس هستند و نقطه همرسی آنها از سه رأس یا سه ضلع به یک فاصله نیست.

نامساوی‌ها در مثلث



این چند رابطه را در هر مثلث ABC به خاطر بسپارید:

۱- هر زاویه خارجی از زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است؛ یعنی:
 $\widehat{B}_1 > \widehat{C}$ و $\widehat{B}_1 > \widehat{A}$

۲- هر ضلع مثلث از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است. ۳- ضلع بزرگ‌تر مقابل زاویه بزرگ‌تر است. ۴- زاویه بزرگ‌تر مقابل ضلع بزرگ‌تر است.

فصل ۲: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن
درس ۱: نسبت و تناسب در هندسه

چند ویژگی مهم و پرکاربرد تناسب

۱- طرفین وسطین کردن
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ ($\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \Leftrightarrow 2 \times 15 = 5 \times 6$)

۲- معکوس کردن طرفین تناسب
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ($\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{15}{6}$)

۳- تعویض جای طرفین یا وسطین
 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ یا $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ ($\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \Leftrightarrow \frac{14}{7} = \frac{4}{2}$)

پاسخ: می‌خواهیم ثابت کنیم AH بر BC عمود نیست. با استفاده از برهان خلف، فرض کنیم AH بر BC عمود باشد، یعنی $\widehat{H} = 90^\circ$. در مثلث ABC داریم: $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$. همچنین در مثلث ABH داریم: $\widehat{B} + \widehat{A}_1 = 90^\circ$. در نهایت نتیجه می‌گیریم که $\widehat{A}_1 = \widehat{C}$ که با فرض مسئله تناقض دارد. بنابراین اگر AH بر BC عمود باشد، فرض مسئله به هم می‌ریزد؛ یعنی با فرض مسئله به تناقض می‌رسیم. پس AH نمی‌تواند بر BC عمود باشد.

عکس یک قضیه

عکس قضیه: اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ای به دست می‌آید که به آن عکس قضیه می‌گویند.

عکس یک قضیه درست می‌تواند گزاره‌ای درست یا نادرست باشد.
عکس قضیه «اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آنگاه قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند» را بنویسید.

پاسخ: فرض این قضیه، «لوزی بودن چهارضلعی» است و حکم آن، «عمودمنصف بودن قطرهای» است. برای بیان عکس قضیه باید جای حکم و فرض را عوض کنیم، بنابراین عکس این قضیه به صورت «اگر قطرهای یک چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند، آنگاه آن چهارضلعی لوزی است.» می‌باشد.

اگر یک قضیه و عکس آن درست باشند، آن قضیه دوطرفه است.

مثال نقض

به مثالی که نشان می‌دهد یک حکم یا حدس کلی نادرست است، مثال نقض می‌گویند.

سیاه‌چاله

برای اثبات یک حکم کلی، یک یا چند مثال کفایت نمی‌کند، اما برای رد کردن یک حکم، کافی است مثالی بیاوریم که نشان دهد آن حکم درست نیست.

مثال نقض نشان دهید که حکم «در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.» درست نیست.

پاسخ: در مثلث زیر $\widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$ ولی $\widehat{A} < 4\widehat{C}$ زیرا $\widehat{A} = 150^\circ$ و $4\widehat{C} = 40^\circ$. پس حکم فوق درست نیست.

چند همرسی مهم در مثلث

به سه یا چند خط که همگی از یک نقطه عبور می‌کنند، خطوط همرس می‌گویند.
۱- عمودمنصف‌های هر مثلث همرس هستند و نقطه همرسی آنها از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

