

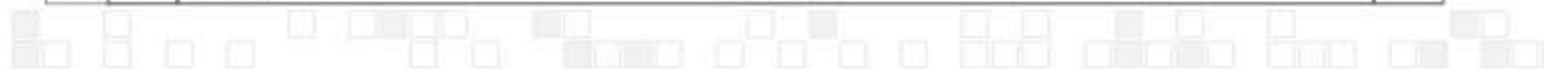


| ردیف | نمره | سؤال                                                                                                                                                                                                            |
|------|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱    | ۰/۲۵ | اگر در یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 - n$ باشد، آن گاه قدر نسبت دنباله عدد ..... است.                                                                                                                             |
| ۲    | ۰/۲۵ | اگر حاصل ضرب شیب های دو خط ۱- باشد، آن دو خط ..... هستند. (مید- مدرسه شهید رجایی- دی ۱۴۰۲)                                                                                                                      |
| ۳    | ۰/۲۵ | جواب معادله $\sqrt{4-x^2} = x$ عدد ..... است.                                                                                                                                                                   |
| ۴    | ۰/۲۵ | کمترین مقدار تابع $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$ برابر با ..... است.                                                                                                                                                    |
| ۵    | ۱/۵  | مجموع تمام عددهای طبیعی مضرب ۴ و کوچک تر از ۲۵۰ را بیابید.                                                                                                                                                      |
| ۶    | ۱    | مجموع چند جمله از دنباله هندسی روبه رو برابر $\frac{1023}{8}$ است؟ (سفر- نمونه دولتی فجر- دی ۱۴۰۱)                                                                                                              |
| ۷    | ۱    | معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{-2+\sqrt{17}}{3}$ ، $\frac{-2-\sqrt{17}}{3}$ باشند. (شهید- مدرسه شرکت فرش- دی ۱۴۰۲)                                                                              |
| ۸    | ۱    | معادله سهمی مقابل را بنویسید. (بختور- مدرسه شهید بهشتی- دی ۱۴۰۱)                                                                                                                                                |
| ۹    | ۱/۲۵ | معادله مقابل را حل کنید. (محرار- مدرسه خواجهنک- دی ۹۷)                                                                                                                                                          |
| ۱۰   | ۱/۲۵ | الف) با استفاده از تعیین علامت، تابع مقابل را بدون قدر مطلق نوشته و نمودار آن را رسم کنید.<br>تابع دو به صورت پرتابل های پلوس و اولو رسم کن.                                                                    |
| ۱۱   | ۱/۲۵ | ب) معادله قدر مطلق $ 2x+ x  =5$ را حل کنید. (خراسان رضوی- مدرسه ایران- دی ۹۷)<br>اگر نقطه $A(2,2)$ رأس یک مربع و معادله یک ضلع آن $4x-2y=7$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟<br>از فرمول فاصله نقطه تا خط استفاده کن. |
| ۱۲   | ۰/۵  | الف) از یک مجموعه ۳ عضوی به روی یک مجموعه ۴ عضوی چند تابع می توان نوشت؟                                                                                                                                         |
| ۱۳   | ۰/۵  | ب) اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = x^2+1$ ، آن گاه حاصل $(g \circ f)(-2)$ را بیابید.<br>الف) دامنه و برد تابع $y = \sqrt{3-x}+1$ را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.                                     |
| ۱۴   | ۱/۵  | ب) آیا در معادله $x - y^2 = 4$ ، $y$ تابعی از $x$ است؟ چرا؟ (محرار- مدرسه خیابان امامی مشهدی- خرداد ۹۸)                                                                                                         |
| ۱۵   | ۱    | آیا دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2-x}$ و $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-1}$ با هم مساوی اند؟ (با ذکر دلیل) (بختور- مدرسه شهید بهشتی- دی ۱۴۰۱)                                                                               |
| ۱۶   | ۱    | نمودار تابع $f$ را رسم کنید.<br>اگر $7 \leq 2x-1$ ، آن گاه حاصل $[x - \frac{1}{2}]$ را بیابید.                                                                                                                  |
| ۱۷   | ۱    | وارون تابع $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ را به دست آورید. نمودار تابع و وارون آن را در یک صفحه مختصات رسم کنید. (محرار- مدرسه خیابان امامی مشهدی- خرداد ۹۸)                                                         |
| ۱۸   | ۱/۵  | اگر $f = \{(1,2), (2,-1), (4,3), (6,4)\}$ و $g = \{(1,5), (2,7), (3,5), (4,3)\}$ ، آن گاه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به صورت زوج مرتب بنویسید. (صبرکار- مدرسه خواجه اکبر- خرداد ۹۸)                     |
| ۱۹   | ۱    | نمودار تابع $f(x) = 3^x - 1$ را رسم کنید.                                                                                                                                                                       |
| ۲۰   | ۱    | معادله نمایی مقابل را حل کنید.                                                                                                                                                                                  |
|      | ۲۰   | جمع نمره                                                                                                                                                                                                        |
|      | ۱    | موفق باشید.                                                                                                                                                                                                     |

| ردیف | پسند یا نپسند | فصل                                                                                                                                                                                                                                           | نمره |
|------|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ۱    |               | در یک دنباله هندسی مجموع هشت جمله اول، $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول است. نسبت جمله هفتم به جمله اول را بیابید.                                                                                                                           | ۱/۲۵ |
| ۲    |               | اگر $x_1$ و $x_2$ ریشه های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل $x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1}$ را بیابید. (مختصر - مدرسه خوارزمی (۶) - دی ۹۷)                                                                                               | ۱    |
| ۳    |               | عبارت داده شده $A$ فرض کن و دو طرفه به توان ۴ برسان.                                                                                                                                                                                          | ۱/۲۵ |
| ۴    |               | اگر $x = 1$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = 3x^2 + (k-1)x + 2$ باشد، صفرهای دیگر تابع را در صورت وجود بیابید.                                                                                                                                      | ۱/۵  |
| ۵    |               | مریم کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از مینا انجام می دهد، اگر هر دو نفر با هم کار کنند کار را در ۱۸ ساعت انجام می دهند، چه زمانی برای هر کدام از این دو نفر لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟ (خواص (مختصر) - مدرسه ایران - دی ۹۷) | ۱    |
| ۶    |               | نمودار تابع $y =  x^2 - 4x $ را رسم کنید. (ماتریک - مدرسه دکتر آزادان - خرداد ۹۸)                                                                                                                                                             | ۱    |
| ۷    |               | برای رسم $y =  f(x) $ در نمودار $y = f(x)$ قسمت های زیر محور $x$ ها رویار و بالای محور $x$ ها.                                                                                                                                                | ۱    |
| ۸    |               | معادله مقابل، را حل کنید. (ماتریک - مدرسه امام حسین (ع) - دی ۱۴۰۷ - با اندک تغییر)                                                                                                                                                            | ۱    |
| ۹    |               | در شکل مقابل، عرض از مبدأ خط گذرنده از نقاط $A$ و $B$ برابر ۲ است.                                                                                                                                                                            | ۲    |
| ۱۰   |               | الف) معادله پاره خط $AB$ را بنویسید.                                                                                                                                                                                                          |      |
| ۱۱   |               | ب) طول نقطه $A$ را بیابید.                                                                                                                                                                                                                    |      |
| ۱۲   |               | ج) معادله خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و بر پاره خط $AB$ عمود باشد.                                                                                                                                                                 |      |
| ۱۳   |               | معادله $ x-1  + x^2 = 4$ را به روش هندسی حل کنید.                                                                                                                                                                                             | ۱    |
| ۱۴   |               | دامنه تابع $f(x) = \frac{x+2}{1+x+x^2}$ برابر با مجموعه اعداد حقیقی است.                                                                                                                                                                      | ۰/۲۵ |
| ۱۵   |               | دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^2}$ با هم برابرند. (مختصر - خرداد ۱۴۰۷)                                                                                                                                                                  | ۰/۲۵ |
| ۱۶   |               | حاصل عبارت $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \dots + [\sqrt{20}]$ برابر ۱۲ است.                                                                                                                                                         | ۰/۲۵ |
| ۱۷   |               | هرگاه $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، حاصل $(\frac{g}{f})(-2)$ برابر صفر است.                                                                                                                                          | ۰/۲۵ |
| ۱۸   |               | تابع $f$ در تمام شرایط زیر صدق می کند. $f$ را رسم کنید، ضابطه آن را بنویسید.                                                                                                                                                                  | ۱/۵  |
| ۱۹   |               | الف) دامنه $f$ مجموعه اعداد حقیقی است، $f(2) = -3$ و $f(-5) = 2$                                                                                                                                                                              |      |
| ۲۰   |               | ب) $f$ در بازه $[0, 2]$ تابع ثابت است.                                                                                                                                                                                                        |      |
| ۲۱   |               | ج) تابع $f$ به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می دهد.                                                                                                                                                                                     |      |
| ۲۲   |               | د) تابع $f$ برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور $x$ ها را در نقطه ای به طول ۳- قطع می کند.                                                                                                                                              |      |
| ۲۳   |               | دامنه تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{4- x+1 }$ را بیابید.                                                                                                                                                                                     | ۱    |

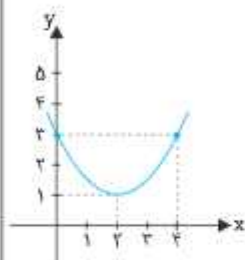


|     |    |                                                                                                                                              |
|-----|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱/۵ | ۱۵ | نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x \left[ \frac{x}{2} \right]$ را در بازه $(-2, 2)$ رسم کنید. (خویشار - محصلک استعدادهای درخشان - دی ۱۴۰۱)       |
| ۱/۵ | ۱۶ | تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ مفروض است. (محصلک کشور - شهریور ۱۴۰۲)                                                                             |
|     |    | الف) نشان دهید تابع $g$ ، یک به یک نیست.                                                                                                     |
|     |    | ب) با محدود کردن دامنه تابع $g$ ، تابعی وارون پذیر به نام $f$ بسازید و وارون آن را به دست آورید.                                             |
| ۱   | ۱۷ | الف) اگر دامنه تابع $f$ به صورت $D_f = (2, +\infty)$ و ضابطه تابع $g$ به صورت $g(x) = \frac{x-1}{x}$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ را بیابید. |
|     |    | $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$                                                                                            |
| ۰/۵ |    | ب) اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \frac{x}{3} + 1$ ، حاصل $(f \circ g^{-1})(2)$ را بیابید.                                                    |
|     |    | <b>فصل ۳</b>                                                                                                                                 |
| ۱   | ۱۸ | نمودار تابع $f(x) = 2^{x-1}$ را رسم کرده، دامنه و برد تابع را تعیین کنید. (سیستان و بوشهر - مدرسه حضرت مریم - خرداد ۹۷)                      |
| ۱   | ۱۹ | مجموعه جواب نامعادله توانی $4^{2x-1} > \frac{1}{1024}$ را بیابید. (همدان - محصلک استان - خرداد ۹۷)                                           |
|     |    | پایه ها در دو طرف نامعادله یکسان گوی.                                                                                                        |
| ۳   | ۷۰ | جمع نمره                                                                                                                                     |
|     |    | موفق باشید.                                                                                                                                  |



## فصل ۱

- ۱ در یک دنباله حسابی جملات دوم و هشتم قرینه اند و جمله هفتم این دنباله ۴ است. مجموع ۸ جمله اول این دنباله را به دست آورید.  
(خوارسنان - هشتاد امتحان ریاضی - دی ۱۴۰۱)
- ۲ در شکل زیر نمودار سهمی  $P(x) = ax^2 + bx + c$  داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید. (هشتاد کشور - شهریور ۱۴۰۲)



- ۳ معادلات زیر را حل کنید.
- الف)  $\frac{9 - 9\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$       ب)  $|x - 1| = 4 - 3x$

## فصل ۲

- ۴ با رسم نمودار تابع  $f(x) = (x-1)^2 + 1$  در محدوده  $(-\infty, 1]$ ، وارون پذیری آن را بررسی کرده و ضابطه تابع وارون آن را بیابید.  
(برای پیدا کردن تابع وارون، x را بر حسب y یا برعکس، یار)
- ۵ اگر  $f = \{(1, 2), (3, 1), (4, 3)\}$  و  $g = \{(2, -1), (3, 7), (4, 0), (1, 2)\}$ ، تابع  $g \circ f$  را محاسبه کنید.

(البرز - مدرسه محمد رسول الله (ص) - دی ۱۴۰۲)

- ۶ اگر دو تابع  $f(x) = \frac{4}{x+3}$  و  $g(x) = \frac{4bx+c}{x^2+ax+9}$  مساوی باشند، مقادیر a و b و c را به دست آورید.  
(خوارسنان - هشتاد امتحان ریاضی - دی ۱۴۰۱)

## فصل ۳

- ۷ با استفاده از قوانین لگاریتم، حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (هیرنگان - مدرسه جلال آل - خرداد ۹۸)
- $$\log_{10} 0.001 - \log_2 81 - \log_2 \frac{1}{64} =$$
- ۸ الف) نمودار تابع  $y = |\log_2(x+1)|$  را رسم کنید.
- ب) اگر  $\log_2 a = b$  و  $\log_2 \sqrt{243} = \log_5 a$  را بر حسب b و a بیابید.

## فصل ۴

- ۹ اگر زاویه ای حاده،  $\alpha$  زاویه ای منفرجه،  $\beta$  و  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  و  $\sin \beta = \frac{4}{5}$  باشد، عبارت های زیر را محاسبه کنید.  $\cos \beta$  و  $\cos \alpha$  رو پیدا کن.

(آذربایجان غربی - هشتاد امتحان - خرداد ۹۷)

الف)  $\sin(\alpha + \beta) =$

ب)  $\sin 2\alpha =$

- ۱۰ مقدار تابع  $f(x) = 10 - \frac{3}{4} \sin(\Delta x - \frac{\pi}{4})$  را به ازای  $x = \frac{\pi}{4}$  به دست آورید. (آذربایجان غربی - هشتاد امتحان - خرداد ۹۷)
- ۱۱ نمودار تابع  $y = 1 + |\cos x|$  را در بازه  $[0, 2\pi]$  رسم کنید. (آلان - مدرسه خاتم الانبیا - خرداد ۹۷)
- ۱۲ رادیان معادل چند درجه است؟  $\frac{\pi}{9}$

۱/۵۵

نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه  $x = 1$  دارای حد باشد ولی حد آن یا مقدار تابع در آن نقطه برابر نباشد.

(خویشاکن - مدرسه امام حسین (ع) - خرداد ۹۷)

۱۳

۱

با توجه به دامنه تابع، حد تابع  $f(x) = \frac{x}{[x] - 3}$  را در نقطه  $x = 3$  بررسی کنید. (فایز - مدرسه امام حسن مجتبی - خرداد ۹۷)

۱۴

۲

حدهای زیر را محاسبه کنید. (فایز - مدرسه امام حسن مجتبی - خرداد ۹۷)

۱۵

الف)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x - 2} =$

ب)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{2})}{\cos x - \sin x} =$

۱/۵۵

مقدار  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که تابع  $x = 2$  در  $f(x) = \begin{cases} [x] + 2ax - b & x > 2 \\ 2 & x = 2 \\ 2bx + 4 & x < 2 \end{cases}$  پیوسته باشد. (ملائیکن - مدرسه امام جعفر (ع) - خرداد ۹۷)

۱۶

۱

حد زیر را بیابید.

۱۷

$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 + x - 42} =$

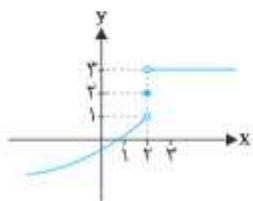
در خروج صورت، ضرب و تقسیم کنید.

۷۰

جمع نمره

موفق باشید.

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                          |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱  | درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.<br>الف) مجموع ریشه‌های معادله $4x^2 - 3x - 7 = 0$ برابر $-\frac{3}{4}$ است.<br>ب) در معادله $ y  = x + 1$ ، $y$ تابعی از $x$ نیست.<br>پ) دو تابع $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ و $g(x) = -\log_5 x$ وارون یکدیگرند.<br>ت) اگر تابع $f(x) + g(x)$ در $x = a$ حد داشته باشد، آنگاه هر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ حد دارند.                             | درست <input type="radio"/> نادرست <input type="radio"/><br>درست <input type="radio"/> نادرست <input type="radio"/><br>درست <input type="radio"/> نادرست <input type="radio"/><br>درست <input type="radio"/> نادرست <input type="radio"/> |
| ۲  | در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.<br>الف) نمایش عبارت «فاصله بین $x$ و ۳ برابر ۷ است» با نماد قدرمطلق به صورت ..... است.<br>ب) برای هر دو تابع، اگر دامنه‌ها با هم برابر و بردها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابر ..... (هستند، نیستند)<br>پ) انتهای کمان روبه‌رو به زاویه ۶ رادیان در ربع ..... دایره مثلثاتی قرار دارد.<br>ت) اگر بازه $(x-1, 7)$ همسایگی عدد ۲ باشد، حدود $x$ بازه ..... می‌باشد. |                                                                                                                                                                                                                                          |
| ۳  | مجموع همه اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۶ را بنویسید. (از فرمول مجموع جملات دنباله استفاده کنید).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | ۱/۲۵                                                                                                                                                                                                                                     |
| ۴  | شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد، علامت ضرایب $b$ و $c$ را تعیین کنید.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | ۰/۵                                                                                                                                                                                                                                      |
| ۵  | معادله $\sqrt{x+1} = x-5$ را حل کنید.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | ۱                                                                                                                                                                                                                                        |
| ۶  | فاصله نقطه $A(-2, 4)$ از خط $2x - 3y + 12 = 0$ را به کمک فرمول فاصله نقطه از خط به دست آورید.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | ۰/۷۵                                                                                                                                                                                                                                     |
| ۷  | نمودار تابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن را بنویسید. ([ نماد جزء صحیح است])<br>$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & -2 \leq x < 0 \\ [x] & 0 \leq x < 2 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                          | ۱/۲۵                                                                                                                                                                                                                                     |
| ۸  | ابتدا مشخص کنید کدام یک از توابع زیر یک به یک است، سپس ضابطه وارون آن را بنویسید.<br>الف) $f(x) = (x-2)^2 \quad x \geq 0$<br>ب) $g(x) =  x-1  + 2 \quad x \geq 1$                                                                                                                                                                                                                                               | ۰/۷۵                                                                                                                                                                                                                                     |
| ۹  | الف) اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = x^2 - 3$ باشد، دامنه $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.<br>ب) اگر $f = \{(2, 4), (-2, 3), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, -2), (1, 7), (3, 0)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.                                                                                                                                                                               | ۱/۵                                                                                                                                                                                                                                      |
| ۱۰ | نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده، ۱۲۸ میلی‌گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند را محاسبه کنید.                                                                                                                                                                                                                                                                            | ۰/۷۵                                                                                                                                                                                                                                     |
| ۱۱ | اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل $\log \sqrt{0.75}$ را بر حسب $a$ و $b$ به دست آورید.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | ۱                                                                                                                                                                                                                                        |

|                                                                                   |          |                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱                                                                                 | ۱۲       | معادله لگاریتمی $\log_7(x+7) - \log_7(x-2) = 2$ را حل کنید.                                                                                                                                                         |
| ۰/۷۵                                                                              | ۱۳       | در یک دایره به شعاع ۳ سانتی متر، اندازه کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی $20^\circ$ را تعیین کنید.                                                                                                                       |
| ۷/۷۵                                                                              | ۱۴       | مقدار عددی هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.<br>الف) $\sin(\frac{5\pi}{4}) + \cos(300^\circ)$<br>ب) $\cos(15^\circ)$                                                                                           |
| ۰/۷۵                                                                              | ۱۵       | نمودار تابع $f(x) = -\sin x + 1$ را به کمک نمودار $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.                                                                                                                        |
| ۱                                                                                 | ۱۶       | با توجه به نمودار تابع $f(x)$ مقدار عبارت، $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] + f(2) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ را به دست آورید.<br>([ ] نماد جزء صحیح است)                                                 |
|  | ۱۷       | حدود زیر را محاسبه کنید. ([ ] نماد جزء صحیح است)<br>الف) $\lim_{x \rightarrow 3} 5$<br>ب) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2[x] - 27}{x - 3}$<br>پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ |
| ۱/۵                                                                               | ۱۸       | مقادیر $a$ و $b$ را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد.<br>$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x > 1 \\ x-1 & x = 1 \\ b-1 & x = 1 \\ x-2a & x < 1 \end{cases}$                                      |
| ۷۰                                                                                | جمع نمره | موفق باشید.                                                                                                                                                                                                         |

$$\begin{aligned} S_n &= 2n^2 - n \Rightarrow S_1 = a_1 = 2 - 1 = 1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 = 2 \times 2^2 - 2 = 2 \Rightarrow 1 + a_2 = 2 \\ \Rightarrow a_2 &= 1 \Rightarrow d = a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

۲- [۵۴] عمود بر هم

$$\sqrt{4-x^2} = x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4-x^2 = x^2 \quad \sqrt{2} \quad [۴۹] - ۳$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \sqrt{4-2} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2} \checkmark$$

$$x = -\sqrt{2} \xrightarrow{\text{جای گذاری در معادله}} \sqrt{4-2} = -\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = -\sqrt{2} \times$$

۴- [۴۵]  $-\frac{49}{8}$  چون ضریب  $x^2$  مثبت است، پس تابع مینیمم دارد و می‌دانیم مینیمم تابع درجه دوم در رأس اتفاق می‌افتد.

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 5$$

$$x \text{ رأس} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$y \text{ رأس} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \times \frac{3}{4} - 5 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} - 5 = \frac{9-18-40}{8}$$

$$\Rightarrow y_{\min} = -\frac{49}{8}$$

۵- [۴۱] اعداد طبیعی مضرب ۴ به فرم  $4k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) هستند، پس داریم:

$$0 < 4k < 250 \Rightarrow 0 < k < \frac{250}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < k < 62.5 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 1, 2, \dots, 62$$

دنباله اعداد طبیعی مضرب ۴ و کوچک‌تر از ۲۵۰ به صورت زیر است:

$$4, 8, 12, \dots, 248 \Rightarrow a_1 = 4, d = 4, n = 62$$

$$S_{62} = \frac{62}{2} (2a_1 + 61d) = 31(2 \times 4 + 61 \times 4) = 31 \times 252 = 7812$$

[۴۲] - ۶

$$a_1 = \frac{1}{8}, q = 2 \Rightarrow S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{8}(2^n - 1)}{2 - 1} = \frac{1023}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{2^n - 1}{8} = \frac{1023}{8} \Rightarrow 2^n - 1 = 1023$$

$$\Rightarrow 2^n = 1024 = 2^{10} \Rightarrow n = 10$$

[۴۴] - ۷

$$\alpha = \frac{-2 - \sqrt{17}}{3}, \beta = \frac{-2 + \sqrt{17}}{3}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{4}{3} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{13}{9} = 0$$

$$\alpha\beta = \frac{4-17}{9} = -\frac{13}{9}$$

۸- [۴۷] سهمی در دو نقطه  $x = -1$  و  $x = 2$  محور  $x$ ها را قطع کرده است، یعنی  $x = -1$  و  $x = 2$  صف‌های تابع هستند؛ پس ضابطه آن به صورت  $f(x) = a(x+1)(x-2)$  است. از طرفی سهمی از نقطه  $(-1, -4)$  عبور می‌کند. بنابراین:

$$f(-1) = -4 \Rightarrow a(1)(-2) = -4 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x^2 - x - 2) = 2x^2 - 2x - 4$$

۹- [۴۹] رادیکال را در یک طرف تساوی نگه داشته، بقیه عبارت را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم؛ حالا طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x - \sqrt{x+1} = 4$$

$$\Rightarrow 2x - 4 = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x-4)^2 = x+1$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 16x + 16 - x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 17x + 15 = 0 \Rightarrow \Delta = (-17)^2 - 4 \times 4 \times 15 = 49$$

$$x = \frac{17 \pm 7}{8} \Rightarrow x = \frac{5}{4}, 3$$

حال ریشه‌های به دست آمده را در معادله اولیه امتحان می‌کنیم:

$$x = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{5}{4} + 1} = 4 \Rightarrow \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{9}{4}} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} - \frac{3}{2} = 4 \Rightarrow 1 = 4 \times$$

$$x = 3 \Rightarrow 6 - \sqrt{3+1} = 4 \Rightarrow 6-2=4 \Rightarrow 4=4 \checkmark$$

پس  $x = \frac{5}{4}$  غیر قابل قبول است و تنها جواب معادله  $x = 3$  است.

۱۰- [۵۱] الف) با توجه به تعیین علامت عبارت‌های داخل قدر مطلق داریم:

|       |   |   |
|-------|---|---|
| $x$   | ۱ | ۲ |
| $x-1$ | - | + |
| $2-x$ | + | - |

$$y = |x-1| - |2-x|$$

$$x < 1: y = -(x-1) - (2-x) = -1$$

$$1 \leq x < 2: y = x-1 - (2-x) = 2x-3$$

$$x \geq 2: y = x-1 + 2-x = 1$$

$$y = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ 2x-3 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ y & -1 & 1 \end{array}$$

ب) با در نظر گرفتن دو محدوده  $x < 0$  و  $x \geq 0$  برای معادله  $|2x+x|=5$

$$x < 0: |2x-x| = 5 \Rightarrow |x| = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 \times \\ x = -5 \checkmark \end{cases} \quad (\text{چون در شرط } x < 0 \text{ صدق نمی‌کند})$$

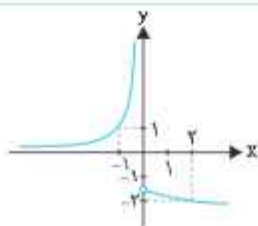
$$x \geq 0: |2x+x| = 5 \Rightarrow |3x| = 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \checkmark \\ x = -\frac{5}{3} \times \end{cases} \quad (\text{چون در شرط } x \geq 0 \text{ صدق نمی‌کند})$$

بنابراین  $x = \frac{5}{3}$  و  $x = -5$  تنها جواب‌های معادله هستند.

۱۱- [۵۹] ابتدا بررسی می‌کنیم که مختصات نقطه  $A(2,3)$  در معادله خط  $4x-3y=7$  صدق می‌کند یا خیر.

$$4x-3y-7=0$$



۱۶- ۱۵۱ و ۱۵۱ اگر  $n \leq u < n+1$  و  $n \in \mathbb{Z}$  آن گاه  $[u] = n$  پس داریم:

$$|2x-1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 2x-1 \leq 7 \xrightarrow{+1} -6 \leq 2x \leq 8$$

$$\xrightarrow{+2} -2 \leq x \leq 4 \xrightarrow{\frac{1}{2}} -1 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

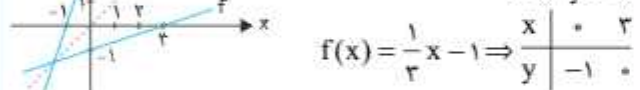
بنابراین  $[x - \frac{1}{2}]$  می تواند یکی از مقادیر  $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$  باشد.

۱۷- ۱۵۱ برای یافتن وارون تابع، باید  $x$  را بر حسب  $y$  حل کرده و در انتها جای  $x$  و  $y$  را با هم عوض کنیم.

$$f(x) = \frac{1}{3}x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}x = y + 1 \Rightarrow x = 3y + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 3x + 3$$

نمودار تابع وارون، قرینه نمودار تابع اولیه نسبت به نیمساز ربع اول و سوم یعنی خط  $y=x$  است.



۱۸- ۱۵۱ و ۱۵۱ می دانیم  $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ ؛ یعنی برای یافتن  $f+g$  باید به ازای مقادیر مشترک دامنه  $f$  و  $g$ ، مقادیر دو تابع  $f$  و  $g$  را با هم جمع کنیم.

$$f = \{(1, 2), (3, -1), (4, 3), (6, 4)\} \Rightarrow D_f = \{1, 3, 4, 6\}$$

$$g = \{(1, 5), (2, 7), (3, 5), (4, 3)\} \Rightarrow D_g = \{1, 2, 3, 4\}$$

بنابراین  $D_f \cap D_g = \{1, 3, 4\}$  در نتیجه:

$$f+g = \{(1, 2+5), (3, -1+5), (4, 3+3)\}$$

$$= \{(1, 7), (3, 4), (4, 6)\}$$

حال می خواهیم تابع  $f \circ g$  را مشخص کنیم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

دامنه  $g$  است که مقادیر تابع به ازای آن ها در دامنه  $f$  باشد، پس

$f \circ g$  را به ازای دامنه  $g$  محاسبه می کنیم:

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(5) = \text{تعریف نشده}$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(7) = \text{تعریف نشده}$$

$$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(5) = \text{تعریف نشده}$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(3) = -1$$

در نتیجه تابع  $f \circ g$  به صورت مقابل است:

$$f \circ g = \{(4, -1)\}$$

۱۹- ۱۵۱ برای رسم  $f(x) = 3^x - 1$  باید نمودار  $y = 3^x$  را یک واحد به پایین منتقل کنیم.

$$4x - 3y = 7 \xrightarrow{\substack{x=2 \\ y=2}} 4 \times 2 - 3 \times 2 = 7 \Rightarrow -1 = 7 \times$$

بنابراین این نقطه روی خط  $4x - 3y = 7$  قرار ندارد.

با توجه به شکل بالا، فاصله نقطه  $A$  تا خط داده شده برابر با طول ضلع مربع است.

$$a = \frac{|4 \times 2 - 3 \times 2 - 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|8 - 6 - 7|}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow S = a^2 = \frac{64}{25}$$

۱۲- الف ۱۵۱ اگر  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  و  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  مفروض باشند، برای تشکیل یک تابع، هر عضو مجموعه  $A$  می تواند به یکی از ۴ عضو  $B$  متناظر شود، پس تعداد توابع از  $A$  به  $B$  برابر با  $4 \times 4 \times 4 = 64$  است.

ب ۱۵۱ ابتدا  $f(-2)$  را محاسبه می کنیم.

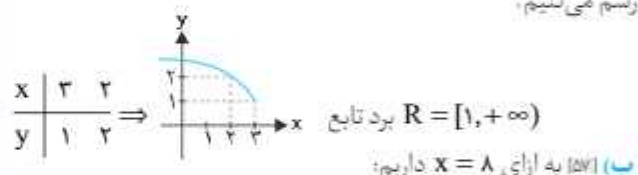
$$f(-2) = \frac{2(-2) - 1}{-2 + 1} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(5) = 5^2 + 1 = 26$$

۱۳- الف ۱۵۱

$$y = \sqrt{2-x} + 1 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D = (-\infty, 2]$$

با توجه به دامنه تابع و نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$ ، نمودار تابع را با نقطه یابی رسم می کنیم.



$$x - y^2 = 4 \xrightarrow{x=4} 4 - y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

برای  $x = 4$  دو مقدار برای  $y$  به دست آمده است، پس این رابطه تابع نیست.

۱۴- ۱۵۱ برای بررسی تساوی دو تابع، ابتدا دامنه آنها را به دست می آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \Rightarrow x^2 - x \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2 - x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix}$$

$$\Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq 1 \Rightarrow D_g = [1, +\infty)$$

چون  $D_f \neq D_g$  است، دو تابع برابر نیستند.

۱۵- ۱۵۱ و ۱۵۱ برای رسم نمودار  $y = -\frac{1}{x}$ ، باید نمودار  $y = \frac{1}{x}$  را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{2+x} & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x & 0 & 2 \\ y & -\sqrt{2} & -2 \end{matrix}$$

$$f(x)=0 \Rightarrow (x-1)(3x^2+2x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ 3x^2+2x-2=0 \end{cases}$$

بنابراین برای پیدا کردن صفرهای دیگر تابع  $f$ ، کافی است معادله  $3x^2+2x-2=0$  را حل کنیم.

$$\Rightarrow \Delta = 9+24=33 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{33}}{6}$$

**۴- [۵۸]** اگر مدت زمان لازم برای مریم را  $x$  ساعت در نظر بگیریم. مدت زمان لازم برای مینا برابر با  $x+15$  است. همچنین مریم در یک ساعت،  $\frac{1}{x}$  کار و مینا،  $\frac{1}{x+15}$  کار را انجام می‌دهند. از طرفی هر دو نفر با هم کار را در ۱۸ ساعت انجام می‌دهند. پس در یک ساعت،  $\frac{1}{18}$  کار تمام می‌شود. پس داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+15} = \frac{1}{18}$$

$$\xrightarrow{\times 18x(x+15)} 18(x+15) + 18x = x(x+15)$$

$$\Rightarrow 26x + 270 = x^2 + 15x \Rightarrow x^2 - 11x - 270 = 0$$

$$\Rightarrow (x-20)(x+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 20 \end{cases}$$

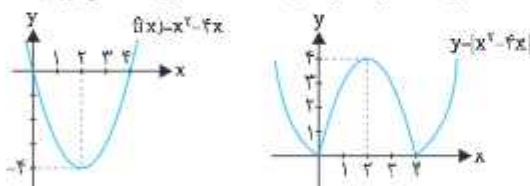
$x = -9$  غیر قابل قبول و  $x = 20$  جواب مسئله است. پس مریم کار را در ۲۰ ساعت و مینا همان کار را در ۴۵ ساعت انجام می‌دهد.

**۵- [۵۹]** ابتدا نمودار  $f(x) = x^2 - 4x$  را رسم می‌کنیم.

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2 \Rightarrow \text{رأس } y = 4 - 8 = -4 \Rightarrow \text{رأس } \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow x=0, x=4$$

حال برای رسم نمودار تابع  $y=|f(x)|$ ، قسمت‌های زیر محور  $x$  ها را نسبت به محور  $x$  ها قرینه کرده و به بالای محور  $x$  ها می‌آوریم.



**۶- [۶۰]** رادیکال را یک طرف تساوی نگه داشته، بقیه عبارت را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم و سپس دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2 + \sqrt{x+2} = x-2 \Rightarrow \sqrt{x+2} = x-4$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x+2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x=2, x=7$$

حال ریشه‌ها را در معادله اصلی امتحان می‌کنیم:

$$x=2: 2 + \sqrt{4} = 2-2 \Rightarrow 4=0 \times \Rightarrow x=2 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$x=7: 2 + \sqrt{9} = 7-2 \Rightarrow 5=5 \checkmark \Rightarrow x=7 \text{ قابل قبول}$$

بنابراین  $x=7$  تنها جواب معادله است.

**۷- [۶۱] الف)** عرض از مبدأ خط گذرنده از نقاط  $A$  و  $B$  همان عرض نقطه  $B$  یعنی  $b$  است که برابر ۲ باشد. حال معادله خط گذرنده از دو نقطه  $B(0, 2)$  و  $C(3, 1)$  را می‌یابیم. ابتدا شیب  $BC$  را محاسبه می‌کنیم:



**۲۰- [۶۲]** پایه‌ها را در دو طرف معادله یکسان می‌کنیم.

$$\Delta^{2x} \times \Delta^{\frac{1}{2}} = 12\Delta^{-x} \Rightarrow \Delta^{2x+\frac{1}{2}} = (\Delta^2)^{-x} = \Delta^{-2x}$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{1}{2} = -2x \Rightarrow 4x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{8}$$

آزمون شماره ۲ نوبت اول دی ماه

$$S_n = \frac{\Delta}{f} S_f \Rightarrow \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\Delta}{f} \times \frac{a_1(q^f - 1)}{q - 1}$$

[۶۳] ۱-

$$q \neq 1 \Rightarrow q^n - 1 = \frac{\Delta}{f} (q^f - 1)$$

$$\Rightarrow (q^f - 1)(q^f + 1) = \frac{\Delta}{f} (q^f - 1)$$

$$\Rightarrow q^f + 1 = \frac{\Delta}{f} \Rightarrow q^f = \frac{1}{f} \Rightarrow q^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{a_f}{a_1} = \frac{a_1 q^f}{a_1} = q^f = (q^{\frac{1}{2}})^2 = \left(\frac{1}{f}\right)^2 = \frac{1}{f^2}$$

**۲- [۶۴]** ابتدا  $S$  و  $P$  معادله داده شده را می‌یابیم.

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 3 \\ P = x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$$

فرض می‌کنیم  $A = x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1}$  است. طرفین  $A$  را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$A^2 = (x_1\sqrt{x_2} + x_2\sqrt{x_1})^2$$

$$= x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2}$$

$$= x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 2x_1 x_2 \sqrt{x_1 x_2}$$

$$\Rightarrow A^2 = PS + 2P\sqrt{P} = 1 \times 3 + 2 \times 1 \times \sqrt{1} = 5$$

$$\Rightarrow A = \pm\sqrt{5}$$

با توجه به اینکه  $\Delta > 0$ ،  $S > 0$  و  $P > 0$  معادله دو ریشه مثبت دارد. پس  $A$  عبارتی مثبت و بنابراین  $A = \sqrt{5}$  قابل قبول است.

**۳- [۶۵]** چون  $x=1$  یکی از صفرهای تابع است. پس  $f(1)=0$  یعنی:

$$f(1) = 2 + k - 1 + 2 = k + 4 = 0$$

$$\Rightarrow k = -4 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 5x + 2$$

حال  $f(x)$  را بر  $x-1$  تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 5x + 2 & x-1 \\ \hline -(3x^2 - 3x) & \\ \hline -2x + 2 & \\ \hline -(-2x + 2) & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow f(x) = (x-1)(3x^2 + 3x - 2)$$

## فصل ۱: جبر و معادله

درس ۱: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید.

**دنباله حسابی:** دنباله‌ای است که هر جمله آن به جز جمله اول از افزودن یک مقدار ثابت به جمله قبل به دست می‌آید. این مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله می‌گویند و با  $d$  نشان می‌دهند. جمله عمومی دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $d$  به صورت  $a_n = a_1 + (n-1)d$  است.

### ۴۱ مجموع جملات دنباله حسابی

مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $d$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

**مثال ۱۳۱:** مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را به دست آورید. **پاسخ:** اعداد طبیعی مضرب ۷ به صورت  $7k$  هستند که  $k \in \mathbb{N}$ . چون اعداد طبیعی مضرب ۷ دو رقمی را می‌خواهیم، داریم:

$$10 \leq 7k \leq 99 \Rightarrow \frac{10}{7} \leq k \leq \frac{99}{7} \Rightarrow k = 2, 3, 4, \dots, 14$$

دنباله مضارب دو رقمی ۷، دنباله‌ای حسابی با جمله اول ۱۴ و قدر نسبت ۷ است:

$$14, 21, 28, \dots, 98 \Rightarrow a_1 = 14, d = 7, n = 13$$

$$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}(2a_1 + 12d)$$

$$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}(2 \times 14 + 12 \times 7) = \frac{13}{2}(28 + 84) = 728$$

**دنباله هندسی:** دنباله‌ای است که هر جمله آن به جز جمله اول از ضرب کردن یک عدد ثابت در جمله قبل به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدر نسبت دنباله می‌گویند و با  $q$  نشان می‌دهند.

جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدر نسبت  $q$  به صورت  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  مقابل است.

### ۴۲ مجموع جملات دنباله هندسی

مجموع  $n$  جمله اول دنباله هندسی به صورت زیر است:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

**مثال ۱۳۲:** برای محافظت از تابش خطرناک موادمواد رادیواکتیو به لایه‌های محافظتی وجود دارد که شدت تابش پرتوها پس از عبور از هر یک از آن‌ها، نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش موادمواد خطرناک دست کم تا ۹۹/۹ درصد کاهش یابد؟

**پاسخ:** اولین لایه، شدت تابش را نصف می‌کند. دومین لایه باز این تابش را نصف می‌کند و .... به همین ترتیب دنباله‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

این دنباله، یک دنباله هندسی با جمله اول  $\frac{1}{2}$  و قدر نسبت  $\frac{1}{2}$  است. حال می‌خواهیم بدانیم مجموع چند جمله از این دنباله، حداقل ۹۹/۹ درصد می‌شود. پس داریم:

$$S_n > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < 1 - \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 10$$

بنابراین حداقل ۱۰ لایه باید استفاده شود.

## درس ۲: معادلات درجه دوم

**مثال ۱۳۳:** صورت کلی معادله درجه دوم به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$

است ( $a \neq 0$ ) که با توجه به علامت  $\Delta = b^2 - 4ac$  سه حالت دارد:

|              |                                   |                                                                            |
|--------------|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta > 0$ | معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد. | $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ |
| $\Delta = 0$ | معادله ریشه مضاعف دارد.           | $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$                                                |
| $\Delta < 0$ | معادله ریشه حقیقی ندارد.          |                                                                            |

### ۴۳ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، آن‌گاه مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

**مثال ۱۳۴:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  باشند، حاصل عبارات زیر را بر حسب  $S$  و  $P$  به ذهن بسپارید:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^2 - 2PS$$

**مثال ۱۳۵:** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله درجه دوم  $rx^2 + x - 4 = 0$

باشد، حاصل عبارت  $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1}$  را به دست آورید.

**پاسخ:** ابتدا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را می‌یابیم:

$$rx^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 \times r(-4) = 17r > 0$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{r}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{4}{r} = -2$$

حال عبارت داده شده را بر حسب  $S$  و  $P$  می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1} &= \frac{\alpha(\alpha+1) + \beta(\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha^2 + \alpha + \beta^2 + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} \\ &= \frac{S^2 - 2P + S}{P + S + 1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2(-2) - \frac{1}{2}}{-2 - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{4} + 4 - \frac{1}{2}}{-1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{15}{4}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2 \times 15}{4 \times 3} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

#### ۴۴ تشکیل معادله با $S$ و $P$

معادله درجه دومی که دو عدد  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های آن می‌باشند، به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  است.

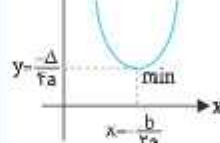
معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $3 - \sqrt{5}$  و  $3 + \sqrt{5}$  باشد.

**پاسخ:** با محاسبه  $S$  و  $P$  داریم:

$$S = 3 - \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5} = 6 \quad P = (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 9 - 5 = 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

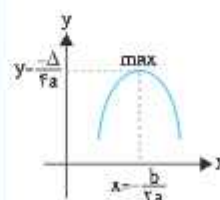
#### • نمودار سهمی

نمودار تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  در صفحه مختصات، شکلی به نام سهمی است که با توجه به علامت  $a$  به یکی از دو صورت زیر است:



$$\text{نقطه مینیمم} = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\text{برد تابع: } y \geq -\frac{\Delta}{4a}$$



(ب) اگر  $a < 0$ : سهمی رو به پایین است و دارای نقطه ماکزیمم یا مختصات زیر است.

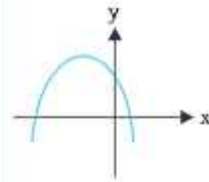
$$\text{نقطه ماکزیمم} = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$\text{برد تابع: } y \leq -\frac{\Delta}{4a}$$

{۴۵} در سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  خط  $x = -\frac{b}{2a}$  محور تقارن سهمی است.

{۴۶} در سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  نقطه برخورد نمودار با محور  $y$ ها نقطه  $(0, c)$  است که  $c$  را عرض از مبدأ سهمی می‌گویند؛ یعنی  $c$  عرض محل برخورد سهمی با محور  $y$ ها است.

{۴۷} نمودار سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  به صورت زیر است. علامت ضرایب  $a$ ،  $b$  و  $c$  را تعیین کنید.



**پاسخ:** سهمی رو به پایین است. پس  $a < 0$ .

عرض محل برخورد سهمی با محور  $y$ ها مثبت است.

یعنی  $c > 0$ . در نهایت، با توجه

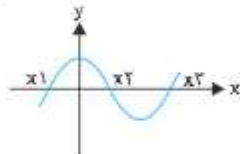
به اینکه رأس سهمی در ناحیه دوم است، رأس سهمی دارای طول منفی است. پس داریم:

$$x = -\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} > 0 \xRightarrow{a < 0} b < 0$$

#### ۴۵ صفحهای تابع

برای هر تابعی مانند  $y = f(x)$  جواب‌های معادله  $f(x) = 0$  را در صورت وجود، صفحهای تابع  $f$  می‌گویند. به بیان دیگر، صفحهای تابع  $f$  مقداری از  $x$  هستند که به ازای آن‌ها  $f(x)$  برابر صفر است. در نمودار  $f(x)$  صفحهای تابع، طول نقاط تلاقی نمودار با محور  $x$ ها است.

برای مثال، در شکل زیر  $x_1$ ،  $x_2$  و  $x_3$  صفحهای تابع هستند.

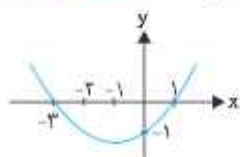


{۴۸} برای یافتن صفحهای تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  باید معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  را حل کنیم که یکی از سه حالت زیر برای آن به دست می‌آید:

|                                                                         |  |  |
|-------------------------------------------------------------------------|--|--|
| سهمی در دو نقطه<br>متمايز محور $x$ ها<br>را قطع می‌کند.<br>$\Delta > 0$ |  |  |
| سهمی در یک<br>نقطه بر محور $x$ ها<br>مماسی است.<br>$\Delta = 0$         |  |  |
| سهمی با محور $x$ ها<br>برخورد ندارد.<br>$\Delta < 0$                    |  |  |

{۴۹} اگر نمودار سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  در دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$  محور طول‌ها را قطع کند، معادله سهمی را می‌توان به صورت  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  نوشت.

{۵۰} ضابطه سهمی زیر را بیابید. (مشابه مثال ص ۱۱ کتاب دینی)





**پاسخ:** (۱۳۳) چون سهمی در دو نقطه  $x = -3$  و  $x = 1$  محور  $x$ ها را قطع کرده است، ضابطه سهمی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = a(x+3)(x-1)$$

از طرفی سهمی از نقطه  $(0, -1)$  می گذرد، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \Rightarrow a(0+3)(0-1) = -1 \Rightarrow -3a = -1 \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-1) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 3) \\ \Rightarrow f(x) &= \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 \end{aligned}$$

(۱۳۴) اگر ضابطه سهمی را به صورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$  در نظر بگیریم، عرض از مبدأ سهمی یعنی  $c$  برابر  $-1$  است. از طرفی مقدار تابع در  $x = 1$  و  $x = -3$  برابر صفر است، پس داریم:

$$\begin{aligned} c &= -1 \Rightarrow f(x) = ax^2 + bx - 1 \\ f(1) &= 0 \Rightarrow a + b - 1 = 0 \Rightarrow a + b = 1 \\ f(-3) &= 0 \Rightarrow 9a - 3b - 1 = 0 \Rightarrow 9a - 3b = 1 \end{aligned}$$

با حل دستگاه  $\begin{cases} a + b = 1 \\ 9a - 3b = 1 \end{cases}$  درمی یابیم که  $a = \frac{1}{3}$  و  $b = \frac{2}{3}$ . بنابراین ضابطه سهمی به صورت  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 1$  است.

(۱۳۵) اگر سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  در نقطه  $x_0$  بر محور  $x$  هامماس باشد، ضابطه سهمی را می توان به صورت  $f(x) = a(x - x_0)^2$  نوشت.

(۱۳۶) ضابطه سهمی مقابل را به دست آورید. **پاسخ:** چون سهمی در نقطه  $x_0 = 2$  بر محور  $x$  هامماس است، ضابطه سهمی را می توان به صورت  $f(x) = a(x - 2)^2$  نوشت. از طرفی، سهمی از نقطه  $(0, -3)$  می گذرد، پس داریم:

$$\begin{aligned} f(0) &= -3 \Rightarrow a(0 - 2)^2 = -3 \Rightarrow 4a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \\ \Rightarrow f(x) &= -\frac{3}{4}(x - 2)^2 \end{aligned}$$

• تعیین علامت ریشه های معادله درجه دوم بدون حل آن

اگر معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  دارای دو ریشه باشد، یعنی  $\Delta > 0$  آن گاه می توان بدون حل معادله به تعداد و علامت ریشه های برد:

$$\Delta > 0 \begin{cases} S > 0 & \text{هر دو ریشه مثبت است.} \\ P > 0 & \text{ریشه ها هم علامت اند.} \\ S < 0 & \text{هر دو ریشه منفی است.} \\ P < 0 & \text{ریشه ها هم علامت نیستند.} \end{cases}$$

(۱۳۷) تعداد و علامت ریشه های معادله  $x^2 - 9x + 7 = 0$  را بدون حل آن مشخص کنید.

**پاسخ:** مقدار  $\Delta$ ،  $S$  و  $P$  را می یابیم:

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 81 - 28 = 53 > 0 \\ P &= \frac{c}{a} = \frac{7}{1} = 7 > 0, S = -\frac{b}{a} = -\frac{9}{1} = -9 < 0 \end{aligned}$$

بنابراین معادله دو ریشه مثبت دارد.

(۱۳۸) مقدار  $k$  را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع  $f(x) = x^2 + kx^2 + x + 2$  برابر  $2$  باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید. (مشابه کار در بخش ۱۳۳ کتاب دومی)

**پاسخ:**  $x = 2$  یکی از صفرهای تابع  $f(x)$  است، یعنی  $f(2) = 0$ .  
 $f(2) = 8 + 4k + 2 + 2 = 0 \Rightarrow 4k = -12$   
 $\Rightarrow k = -3 \Rightarrow f(x) = x^2 - 3x^2 + x + 2$   
 حال  $f(x)$  را بر  $x - 2$  تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 3x^2 + x + 2 & x - 2 \\ - (x^2 - 2x^2) & \\ \hline -x^2 + x + 2 & \\ - (-x^2 + 2x) & \\ \hline -x + 2 & \\ - (-x + 2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

با حل  $x^2 - x - 1 = 0$  صفرهای دیگر تابع  $f$  به دست می آید:

$$\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

#### ۴۶ معادلات قابل تبدیل به معادلات درجه ۲

بعضی از معادلات، درجه دوم نیستند ولی با تغییر متغیر مناسب می توان آن ها را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد و پس از حل آن و باز رجوع به تغییر متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.

(۱۳۹) صفرهای تابع  $f(x) = (4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15$  را بیابید. **پاسخ:** باید معادله  $f(x) = 0$  را حل کنیم که با استفاده از تغییر متغیر  $t = 4 - x^2$  داریم:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \Rightarrow (4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0 \\ \xrightarrow{t=4-x^2} t^2 - 2t - 15 &= 0 \Rightarrow (t - 5)(t + 3) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \Rightarrow 4 - x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = -1 \\ t = -3 \Rightarrow 4 - x^2 = -3 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \end{cases} \end{aligned}$$

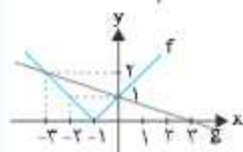
#### ۴۷ روش هندسی حل معادلات

در این روش، معادله را به صورت  $f(x) = g(x)$  نوشته، سپس نمودار توابع  $y = f(x)$  و  $y = g(x)$  را در یک صفحه مختصات رسم می کنیم. طول نقاط برخورد دو تابع  $f$  و  $g$  ریشه های معادله هستند، و برعکس هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط تلاقی این نمودار است. (۱۴۰) تعداد و مقدار ریشه های معادله  $|x + 1| + 1 = \frac{1}{3}x$  را به روش هندسی به دست آورید.

**پاسخ:** معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$|x + 1| = 1 - \frac{1}{3}x \Rightarrow f(x) = |x + 1|, g(x) = 1 - \frac{1}{3}x$$

با رسم توابع  $f$  و  $g$  داریم:



معادله دو ریشه  $x = -3$  و  $x = 0$  دارد.