



مفاهیم کلیدی

این فصل شامل دو بحث مستقل از هم (شمارش، احتمال - چرخه آمار) است. برای فهم بهتر شمارش و احتمال از مثال‌های ساده‌ای که در ابتدای بحث آورده شده است شروع کنید. با مطالعه چرخه آمار می‌آموزید که برای حل یک مسئله یا موضوع اجتماعی چگونه برنامه‌ریزی کنید و چه مراحل یا گام‌هایی را در پیش بگیرید. تمرین‌های زیر را از کتاب درسی مطالعه کنید:

کار در کلاس صفحه ۴، کار در کلاس صفحه ۶، مثال صفحه ۸، کار در کلاس صفحه ۹، تمرین‌های ۲ تا ۸ صفحه ۱۱، سؤال‌های ۱ تا ۳ کار در کلاس صفحه ۱۸، فعالیت صفحه ۱۹، سؤال ۲ و ۳ کار در کلاس صفحه ۲۰، فعالیت صفحه ۲۲، کار در کلاس صفحه‌های ۲۳ و ۲۴، تمرین‌های ۲ تا ۸ صفحه‌های ۲۵ و ۲۶، تمرین‌های ۱۲ و ۱۳ صفحه ۲۷، تمام تمرین‌های صفحه‌های ۳۹ تا ۴۴.

مفاهیم کلیدی

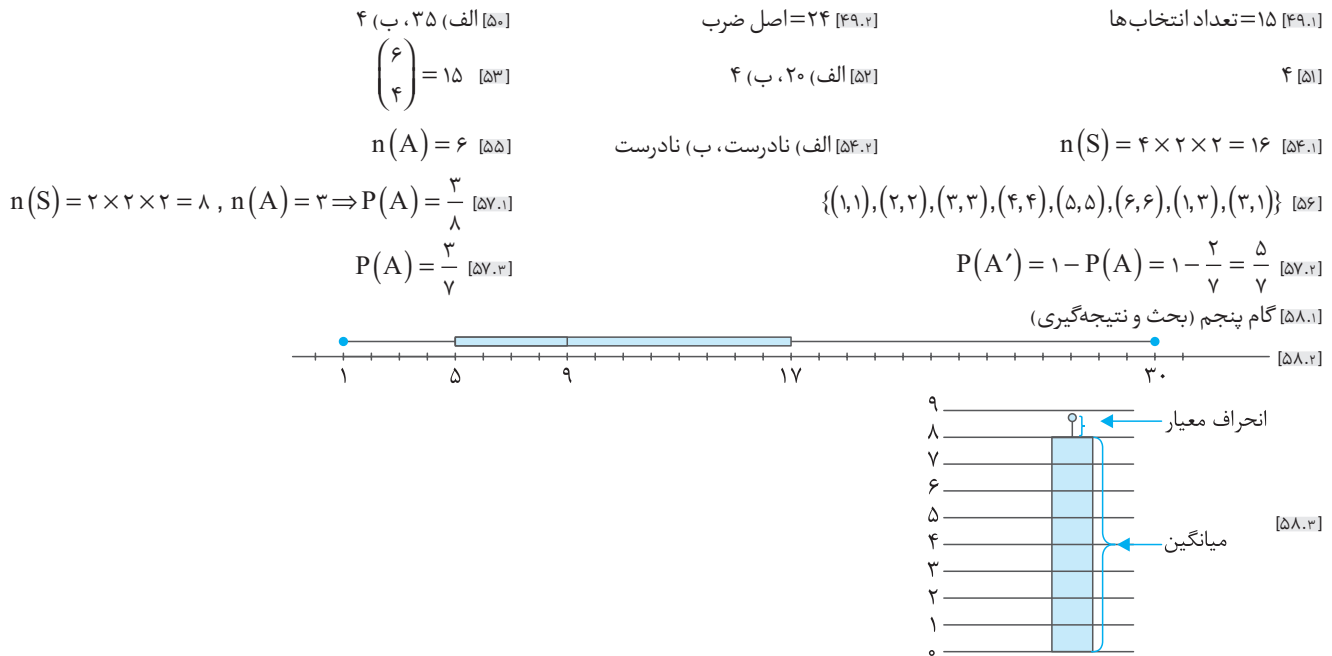


آزمون تشخیصی مفاهیم کلیدی

- ۴۹.۱ به چند طریق می‌توان فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس را از بین ۵ خودکار با رنگ‌های متفاوت و ۶ مداد با رنگ‌ها متفاوت و ۴ روان‌نویس با رنگ‌های متفاوت انتخاب کرد؟
- ۴۹.۲ به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی با حروف «پ، ج، د، ح» ساخت؟ (بدون تکرار حروف)
- ۵۰ مقدار هر یک از عبارات زیر را به دست آورید.
- الف) $\frac{5! + 6!}{3!} =$
- ب) $0! + 1! + 2! + 3! =$
- ۵۱ با ارقام ۰، ۱ و ۳ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟
- ۵۲ حاصل عبارات زیر را به دست آورید.
- الف) $P(5, 2) =$
- ب) $P(4, 1) =$
- ۵۳ تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به دست آورید.
- ۵۴.۱ فضای نمونه‌ای حاصل از انداختن یک هرم چهاروجهی با وجه‌های مساوی (منتظم) و دو سکه، چند عضو دارد؟
- ۵۴.۲ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
- الف) از ۳ مداد و ۵ خودکار در یک جعبه به طور تصادفی یکی خارج می‌کنیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی مجموعه دو عضو {خودکار، مداد} است.
- ب) مشاهده دو مهره قرمز، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن فقط ۷ مهره قرمز وجود دارد یک پدیده تصادفی است.
- ۵۵ دو تاس را پرتاب می‌کنیم پیشامد اینکه مجموع اعداد آمده ۷ باشد، چند عضو دارد؟
- ۵۶ دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آنکه مجموع عددهای روشده برابر ۴ باشد یا دو عدد یکسان رو شوند را مشخص کنید.

- ۵۷.۱ خانواده‌ای سه فرزند دارد. احتمال اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشد، را به دست آورید.
- ۵۷.۲ احتمال اینکه در طول مسافرت ماشین خراب شود $\frac{2}{7}$ است. احتمال اینکه تا انتهای سفر ماشین سالم باشد را به دست آورید.
- ۵۷.۳ از بین ۳ دانش‌آموز دختر و ۴ دانش‌آموز پسر ۲ دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر دو دانش‌آموز از یک جنسیت باشند، محاسبه کنید.
- ۵۸.۱ نقد و بررسی و ایده‌های جدید مربوط به کدام گام چرخه آمار است؟
- ۵۸.۲ نمودار جعبه‌ای داده‌های مقابل را رسم کنید.
- ۵۸.۳ اگر در یک بررسی آماری مقدار میانگین داده‌ها ۸ و انحراف معیار داده‌ها 0.75 باشد، نمودار میانگین انحراف معیار داده‌ها را رسم کنید.

پاسخ



● درس اول: شمارش



+ ۴۹ اصل جمع و اصل ضرب

● اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را بتوان با هم انجام داد، در این صورت به $m + n$ طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد.

سوال اگر فردی در یک رستوران بتواند فقط یک نوع خورشید را از بین ۵ نوع خورشید یا یک نوع کباب را از بین سه نوع کباب متفاوت انتخاب کند، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

$$m = 5, n = 3$$

$$m + n = 5 + 3 = 8 = \text{تعداد حالت‌های انتخاب}$$

پاسخ با توجه به اصل جمع خواهیم داشت:

نکته ۱- هرگاه در صورت سؤال از واژه «یا» استفاده شده باشد، از اصل جمع می‌توانیم استفاده کنیم.

۲- اصل جمع را می‌توان به بیش از دو عمل تعمیم داد. یعنی اگر کاری را بتوان به چند روش مختلف انجام داد و در روش اول n_1 انتخاب، در روش دوم n_2 انتخاب، ... و در روش k ام n_k انتخاب وجود داشته باشد و این روش‌ها با هم انجام نشوند، کار مورد نظر به $(n_1 + n_2 + \dots + n_k)$ روش انجام می‌شود.

سوال پارسا از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می‌تواند، یک کتاب برای مطالعه انتخاب کند؟

پاسخ با توجه به متن سؤال پارسا این کتاب را باید از بین کتاب‌های ریاضی، یا از بین کتاب‌های عربی و یا از بین کتاب‌های ادبیات انتخاب

$$m = 3, n = 2, r = 4$$

انتخاب کند، پس با توجه به:

$$m + n + r = 3 + 2 + 4 = 9 = \text{تعداد حالت‌های ممکن}$$

● اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل، آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است.

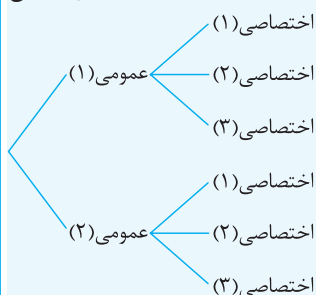
سوال

کورش دانشجوی سال دوم است که از بین دو درس عمومی، یک درس و از میان سه درس اختصاصی، یک درس باید انتخاب کند، او به چند طریق می تواند این کار را انجام دهد؟

مفاهیم کلیدی

$$m = 3, n = 2$$

$$m \times n = 3 \times 2 = 6 = \text{تعداد حالت های ممکن}$$



پاسخ با توجه به متن سؤال به کمک اصل ضرب می توان به جواب رسید:

نمودار حالت های ممکن:

نکته ۱- هنگامی که در صورت سؤال از واژه «و» استفاده شده باشد، برای حل سؤال از اصل ضرب استفاده کنید.

- ۲- اصل ضرب برای بیشتر از دو عمل هم قابل تعمیم است و به کار برده می شود. یعنی اگر عملی از چند بخش مجزا تشکیل شده باشد و بخش اول به n_1 روش، بخش دوم به n_2 روش و... بخش k ام به n_k روش قابل انجام باشد، این عمل به $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ روش قابل انجام است.
- ۳- برای حل برخی از سؤالات نیاز است از هر دو اصل جمع و ضرب استفاده شود.

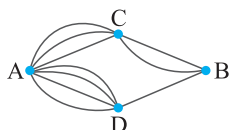
سوال

نیما از بین ۳ کتاب ریاضی، ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می تواند، یک کتاب ریاضی، یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟

$$m = 3, n = 2, r = 4$$

$$m \times n \times r = 3 \times 2 \times 4 = 24 = \text{تعداد حالت های ممکن}$$

پاسخ با توجه به اصل ضرب خواهیم داشت:

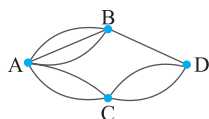


سوال بین شهرهای A، B، C و D مطابق شکل مقابل راه هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می توان

از شهر C و بدون عبور از شهر B به شهر D مسافرت کرد؟

$$\text{تعداد راه ها} = 3 \times 4 = 12$$

پاسخ با توجه به صورت سؤال، نباید از شهر B عبور کرد. پس تنها یک مسیر $A \rightarrow D \rightarrow C$ وجود دارد بنابراین:



سوال با توجه به نمودار مقابل به چند طریق می توان از A به D رفت؟

پاسخ به دو روش می توان از A به D سفر کرد. مسیر $A \rightarrow B \rightarrow D$ یا مسیر $A \rightarrow C \rightarrow D$. بنابراین در این مثال از اصل جمع و ضرب

$$\text{هر دو استفاده کرده ایم:} \quad (3 \times 1) + (2 \times 2) = 3 + 4 = 7 = \text{تعداد کل راه ها}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $A \rightarrow B \rightarrow D$ $A \rightarrow C \rightarrow D$

۵۰ نماد فاکتوریل

از نماد فاکتوریل که به صورت ! است، برای نمایش ضرب اعداد طبیعی بزرگ تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک تر از خودش استفاده می کنیم؛ به عبارتی

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

!n (n فاکتوریل) یعنی ضرب همه اعداد طبیعی از عدد ۱ تا عدد n.

$$\text{مثلاً: } 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4, \quad 3! = 1 \times 2 \times 3$$

قرارداد: صفر فاکتوریل و ۱ فاکتوریل را برابر عدد ۱ در نظر می گیریم:

$$0! = 1, \quad 1! = 1$$

سوال

حاصل هریک از موارد زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $۴! + ۳! + ۰!$

ب) $\frac{۵!}{۳!}$

ج) $۳ \times ۴! + ۳!$

پاسخ

الف) $۴! + ۳! + ۰! = (۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴) + (۱ \times ۲ \times ۳) + ۱ = ۲۴ + ۶ + ۱ = ۳۱$

ب) $\frac{۵!}{۳!} = \frac{\cancel{۵} \times \cancel{۴} \times \cancel{۳} \times ۴ \times ۵}{\cancel{۳} \times \cancel{۲} \times \cancel{۱}} = \frac{۴ \times ۵}{۱} = \frac{۲۰}{۱} = ۲۰$

ج) $۳ \times ۴! + ۳! = ۳(۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴) + (۱ \times ۲ \times ۳) = ۳(۲۴) + ۶ = ۷۸$

نکته گاهی ممکن است لازم نباشد فاکتوریل یک عدد را تا ۱ باز کنیم. در این حالت به عدد موردنظرمان که رسیدیم جلوی آن علامت فاکتوریل گذاشته و دیگر ادامه نمی‌دهیم این شرایط معمولاً در ساده کردن کسرها اتفاق می‌افتد.

$$۶! = ۶ \times \underbrace{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۵!} = ۶ \times ۵!$$

$$۶! = ۶ \times ۵ \times \underbrace{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۴!} = ۶ \times ۵ \times ۴!$$

:

$$n! = n \times \underbrace{(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}_{(n-1)!} = n \times (n-1)!$$

$$n! = n \times (n-1) \times \underbrace{(n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1}_{(n-2)!} = n \times (n-1) \times (n-2)!$$

:

مثلاً:

با توجه به نمونه گفته شده در حالت کلی $n!$ را می‌توان به صورت زیر نیز نمایش داد.

سوال

حاصل هریک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{۷!}{۳!}$

ب) $\frac{۵! - ۴!}{۴!}$

ج) $\frac{n!}{(n-1)!}$

د) $\frac{(n+1)!}{n!}$

پاسخ

الف) $\frac{۷!}{۳!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times \cancel{۳}!}{\cancel{۳}!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴}{۱} = \frac{۸۴۰}{۱} = ۸۴۰$

ب) $\frac{۵! - ۴!}{۴!} = \frac{۵ \times ۴! - ۴!}{۴!}$

$$= \frac{۴!(۵ - ۱)}{۴!} = \frac{۵ - ۱}{۱} = ۴$$

ج) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{\cancel{(n-1)!} \times n}{\cancel{(n-1)!}} = \frac{n}{۱} = n$

د) $\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{\cancel{n!} \times (n+1)}{\cancel{n!}} = \frac{n+1}{۱} = n+1$

از $۴!$ (عامل مشترک) در صورت کسر فاکتور می‌گیریم:

سوال

حاصل $\frac{۶!}{۳!}$ کدام است؟

۳۵ (۴)

۱۲۰ (۳)

۳۰ (۲)

۲۰ (۱)

پاسخ گزینه «۳»

$$\frac{۶!}{۳!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times \cancel{۳}!}{\cancel{۳}!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴}{۱} = \frac{۱۲۰}{۱} = ۱۲۰$$

سوال درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) حاصل $\frac{8!}{4!}$ برابر ۲! است. (ب) $3! + 3 \times 2!$ برابر ۷! است.

پاسخ الف) نادرست

در صورتی که ۲! برابر ۲ است.

ب) نادرست

در صورتی که:

$$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4 \times 3 \times 2 \times 1}}{\cancel{4 \times 3 \times 2 \times 1}} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{1} = 1680$$

$$2 \times 3! + 3! = 2(3 \times 2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1) = 12 + 6 = 18$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

۵۱+ جایگشت n شیء

هر یک از حالت‌های کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک **جایگشت** n تایی از آن n شیء می‌گویند.

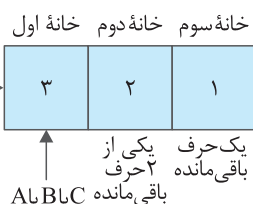
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

مثلاً: تمام جایگشت‌های سه حرفی A, B, C عبارت‌اند از:

بنابراین حروف A, B و C به ۶ طریق می‌توانند کنار هم قرار بگیرند.

در بسیاری از مواقع نوشتن تمامی جایگشت‌ها کاری وقت‌گیر و همراه با اشتباه است. ولی می‌توان به کمک اصل جمع و ضرب تعداد آنها را به صورت زیر به دست آورد.

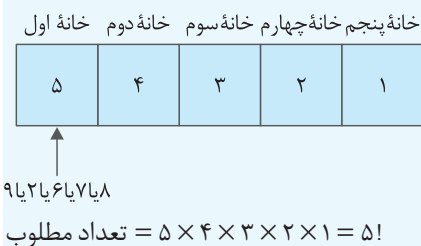
حل مثال بالا: در خانه اول هر یک از حروف A یا B یا C می‌تواند قرار گیرد. پس به سه حالت ممکن است پُر شود. یکی از حروف در خانه اول قرار می‌گیرد و برای خانه دوم دو حالت باقی می‌ماند. یکی از دو حرف در خانه دوم قرار می‌گیرد و در نهایت برای خانه سوم تنها یک حالت باقی می‌ماند.



کاردِر کلاس [صفحه ۴ کتاب درسی] با اعداد ۸, ۷, ۶, ۲, ۹ چند عدد ۵ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ با توجه به خانه‌های خالی زیر خواهیم داشت:

در خانه اول هر یک از ۵ عدد داده شده می‌تواند قرار گیرند، یک رقم در این خانه قرار می‌گیرد و برای خانه دوم هر یک از چهار رقم باقی مانده می‌تواند قرار گیرند. به همین ترتیب بقیه خانه‌ها را پر کرده و داریم:

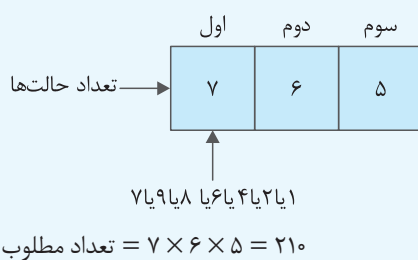


با توجه به مثال‌های بالا نکته زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

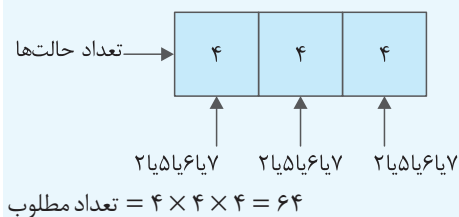
نکته تعداد جایگشت‌های n تایی از n شیء برابر است با $n!$ ؛ مثلاً تعداد کلمات ۴ حرفی که با حروف کلمه «کتاب» می‌توان نوشت برابر است با $4!$

سوال با اعداد ۱, ۲, ۴, ۶, ۸, ۹, ۷ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ در خانه اول (صدگان) یکی از ۷ رقم می‌تواند قرار گیرند. یک رقم در این جایگاه قرار می‌گیرد. برای خانه دوم (دهگان) هر یک از شش رقم باقی مانده می‌تواند قرار گیرند، یک رقم در این جایگاه قرار می‌گیرد. برای خانه سوم (یکان)، پنج رقم برای انتخاب شدن باقی می‌ماند.

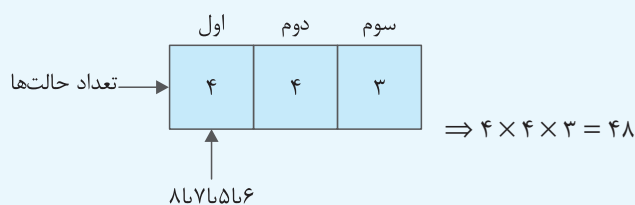


سوال با اعداد ۲، ۵، ۶، ۷ چند عدد سه رقمی با تکرار ارقام می توان نوشت ؟



پاسخ چون در صورت سؤال با تکرار قید شده است، هر بار که یک عدد استفاده شد و در یک جایگاه قرار گرفت، بار دیگر هم دوباره می تواند استفاده شود. پس خواهیم داشت:

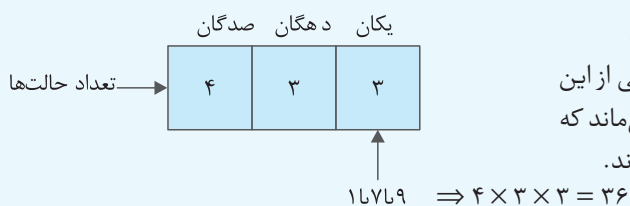
سوال با اعداد ۰، ۶، ۵، ۸، ۷ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟



پاسخ توجه داشته باشید که در ارقام داده شده عدد صفر نمی تواند در سمت چپ اعداد قرار گیرد زیرا خوانده نمی شود، پس:

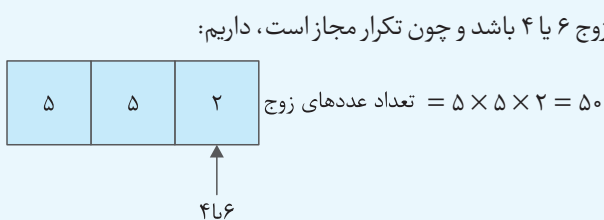
همان طور که می بینید در خانه دوم (دهگان) هر یک از ۳ عدد باقی مانده یا عدد صفر می توانند قرار گیرند، پس باز هم از بین ۴ عدد باقی مانده که می تواند در خانه دوم قرار گیرد یکی را قرار می دهیم.

سوال با ارقام ۱، ۲، ۴، ۷، ۹ چند عدد ۳ رقمی فرد بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟ [نویسی - دی ۹۹]



پاسخ برای آنکه عدد مورد نظر فرد باشد، باید رقم یکانش فرد باشد. رقم یکان می تواند یکی از سه رقم ۱، ۷ یا ۹ باشد (۳ حالت). فقط یکی از این ارقام را در خانه یکان قرار می دهیم. برای خانه صدگان ۴ رقم باقی می ماند که یکی از ارقام در آن قرار می گیرد. در پایان ۳ رقم برای خانه دهگان می ماند.

سوال با اعداد ۲، ۶، ۴، ۱، ۳ چند عدد سه رقمی زوج با تکرار ارقام می توان نوشت ؟

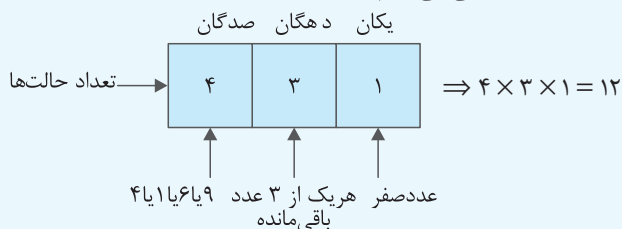


پاسخ چون عدد مورد نظر زوج است، پس رقم یکان باید یکی از اعداد زوج ۶ یا ۴ باشد و چون تکرار مجاز است، داریم:

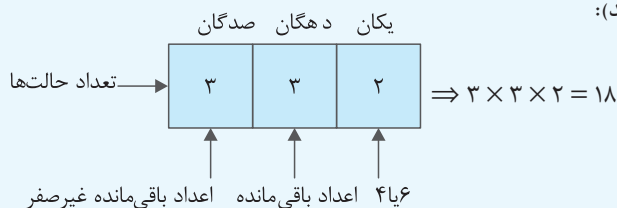
تکته اگر برای ساختن اعداد زوج یا مضرب ۵ صفر جزء ارقام باشد و تکرار ارقام هم مجاز نباشد، آنگاه برای به دست آوردن تعداد کل حالت های ممکن یکبار صفر را در یکان قرار می دهیم و تعداد حالت های آن را به دست می آوریم و بار دیگر تعداد حالت هایی که یکان صفر نباشد را به دست می آوریم سپس تعداد هر دو حالت را با هم جمع می کنیم.

سوال چه تعداد اعداد زوج ۳ رقمی بدون تکرار با ارقام ۴، ۱، ۶، ۰، ۹ می توان نوشت؟

پاسخ با توجه به نکته تعداد اعداد زوجی که رقم یکان آنها صفر است را جداگانه بررسی می کنیم:
حالت اول: تعداد اعداد زوجی که رقم یکان آنها صفر است:



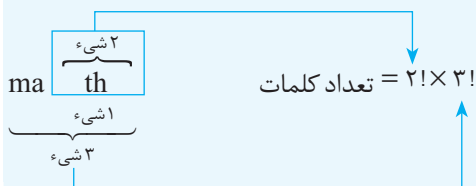
حالت دوم: تعداد اعداد زوجی که رقم یکان آنها صفر نباشد (۶ یا ۴ باشد):



جمع دو حالت $\leftarrow 12 + 18 = 30 =$ تعداد ۳ رقمی های زوج

نکته اگر بخواهیم تعداد جایگشت هایی که در آن قرار است چند شیء خاص کنار هم باشند را به دست آوریم، باید آنها را در یک بسته قرار دهیم و آن را یک شیء جدید در نظر بگیریم. سپس جایگشت های این شیء با بقیه اشیاء و همچنین جایگشت های اشیاء داخل بسته را حساب و در هم ضرب می کنیم.

سوال با حروف کلمه math چند کلمه چهار حرفی می توان ساخت به طوری که حروف t و h کنار هم باشند؟



۵۲ تبدیل r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء که جابه جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد را با نماد $P(n, r)$ نشان می دهیم و از رابطه زیر محاسبه می کنیم:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(r کوچک تر یا مساوی n است)

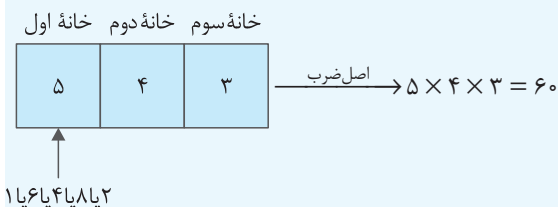
مثلاً حالت های مختلف ساخت اعداد که با تغییر جای ارقام اعداد جدید ساخته می شود یا حالت های مختلف ساخت کلمات که با تغییر جای حروف کلمات جدید ایجاد می گردد.

سوال با ارقام ۱، ۶، ۴، ۸، ۲ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت؟

پاسخ روش اول: $n = 5, r = 3$

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{2 \times 1} = \frac{5 \times 4 \times 3}{1} = 60$$

روش دوم: به کمک اصل ضرب حل می کنیم:



سوال ۱۲ نفر در مسابقات دو شرکت می‌کنند. به چند حالت ممکن است نفرات اول تا سوم مشخص شوند؟

$$n = 12, r = 3$$

پاسخ چون ترتیب انتخاب مهم است پس، از فرمول ترتیب استفاده می‌کنیم.

$$P(12, 3) = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times \cancel{9!}}{\cancel{9!}} = 1320$$

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

نکته در تبدیل $P(n, r)$ اگر $r = n$ باشد، داریم:

۵۳+ ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء را که جابه جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدیدی تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت

نداشته باشد، با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نمایش داده می‌شود و با دستور مقابل محاسبه می‌شود:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(r کوچک‌تر یا مساوی n است $r \leq n$)

مثلاً برای انتخاب ۳ نفر از ۵ نفر برای تشکیل یک گروه ۳ نفره که ترتیب انتخاب اهمیت ندارد، بلکه کافی است فقط سه نفر انتخاب شوند.

کاردرکلاس [صفحه ۸ کتاب درسی] تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی که با حروف A, B, C, M, F, S می‌توان ساخت را به دست آورید.

پاسخ با توجه به اینکه جابه جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی ایجاد نمی‌کند پس می‌توان از فرمول ترکیب استفاده کرد:

$$n = 6, r = 3 \quad C_3^6 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times \cancel{3!}}{3! \times \cancel{3!}} = \frac{\cancel{3} \times 5 \times 4}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 20$$

نکته برای انتخاب r شیء از n شیء متمایز روابط مقابل برقرار است:

$$1) \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1 \Rightarrow \binom{n}{n} = 1$$

$$2) \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = \frac{n}{1} = n \Rightarrow \binom{n}{1} = n$$

$$3) \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)! \times 1!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \Rightarrow \binom{n}{n-1} = n$$

$$4) \binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \times 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

سوال در جعبه‌ای ۴ مهره آبی و ۶ مهره سفید وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم ۳ مهره از این جعبه خارج کنیم؟

پاسخ در انتخاب مهره‌های رنگی ترتیب انتخاب مهم نیست. در کل $6 + 4 = 10$ مهره داخل جعبه قرار دارد که باید ۳ تا از بین آنها انتخاب

شوند که به کمک فرمول ترکیب می‌توانیم این کار را انجام دهیم.

$$n = 10, r = 3 \quad \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{3! \times \cancel{7!}} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 8}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 5 \times 8 = 40$$

سوال روی محیط یک دایره ۸ نقطه قرار دارد:

(الف) چند مثلث با این نقاط می‌توان ساخت؟ (ب) چند وتر از این نقاط می‌توان رسم نمود؟

$$n = 8, r = 3$$

پاسخ (الف) با اتصال هر سه نقطه از این نقاط به هم یک مثلث ایجاد می‌شود و چون ترتیب اهمیتی ندارد، پس:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{3! \times \cancel{5!}} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{2}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 56$$

$$n = 8, r = 2$$

(ب) با اتصال هر دو نقطه روی محیط یک دایره یک وتر از دایره ایجاد می‌شود.

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6!}}{2! \times \cancel{6!}} = \frac{\cancel{2} \times 7}{\cancel{2} \times 1} = 28$$

سوال به چند طریق می توان ۳ کتاب متمایز را از بین ۵ کتاب متمایز جهت هدیه دادن انتخاب کرد؟

پاسخ با توجه به اینکه ترتیب انتخاب کتاب برای هدیه دادن اهمیت ندارد پس:

$$n = 5, r = 3$$

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!} \times 2!} = \frac{20}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$$

مفاهیم کلیدی

۵۳

سوال به چند طریق می توان از بین ۱۰ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟

پاسخ در تشکیل تیم با جابه جایی ترتیب انتخاب افراد، تیم جدیدی ایجاد نمی شود، پس:

$$\text{تعداد تیم های ۶ نفره} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5 \times 3 \times 2 \times 7 = 210$$

سوال در لیست مسافران یک هواپیما ۶ جای خالی موجود است. به چند طریق ۹ نفر را می توان در این لیست جای داد؟

$$n = 9, r = 6$$

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{6!} \times 3!} = \frac{\cancel{9} \times \cancel{8} \times 7}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

پاسخ

سوال اگر در جعبه ای ۵ مهره قرمز و ۴ مهره سفید وجود داشته باشد به چند طریق می توانیم ۳ مهره انتخاب کنیم که ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید باشد؟

$$\text{تعداد حالت} = \binom{5}{2} \times \binom{4}{1}$$

انتخاب ۲ مهره قرمز انتخاب ۱ مهره سفید

$$= \frac{5!}{2!(5-2)!} \times 4 = \frac{5!}{2! \times 3!} \times 4 = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{2! \times \cancel{3!}} \times 4 = \frac{\cancel{5} \times \cancel{4}}{\cancel{2} \times 1} \times 4 = 40$$

پاسخ

سوال از ۴ مهره سفید و ۳ مهره آبی به چند طریق می توان ۳ مهره انتخاب کرد که ۲ مهره هم رنگ باشند؟

پاسخ از ۳ مهره انتخابی باید دو مهره هم رنگ باشند. پس یا دو مهره سفید و ۱ مهره آبی است یا دو مهره آبی و ۱ مهره سفید است. بنابراین:

$$\text{تعداد حالات} = \binom{4}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{3}{2}$$

۲ تا آبی و یکی سفید یا یکی آبی و ۲ تا سفید

$$= \frac{4!}{2!(4-2)!} \times 3 + 4 \times \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{4!}{2! \times 2!} \times 3 + 4 \times \frac{3!}{2! \times 1!} = \frac{4 \times 3 \times \cancel{2!}}{2! \times \cancel{2!}} \times 3 + 4 \times \frac{3 \times \cancel{2!}}{\cancel{2!} \times 1} = \left(\frac{12}{2} \times \frac{3}{1}\right) + \left(\frac{4}{1} \times \frac{3}{1}\right) = 18 + 12 = 30$$

سوال از بین ۴ مهره سفید و ۳ مهره قرمز به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد که حداقل دو مهره سفید باشد؟

پاسخ حداقل دو مهره سفید باشد یعنی اینکه یا ۲ مهره سفید و یک مهره قرمز است یا هر ۳ مهره سفید است، پس:

$$\begin{aligned} \text{تعداد حالات} &= \binom{4}{2} \times \binom{3}{1} + \binom{3}{3} \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ &\quad \text{۲ تا سفید} \quad \text{۱ تا سفید یا یکی قرمز و} \quad \text{۳ تا سفید} \\ \frac{4!}{2!(4-2)!} \times 3 + 1 &= \frac{4!}{2! \times 2!} \times 3 + 1 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} \times 3 + 1 \\ &= \left(\frac{12}{2} \times \frac{3}{1}\right) + 1 = (6 \times 3) + 1 = 18 + 1 = 19 \end{aligned}$$

نمرین‌های امتحانی

(الف) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

نادرست	درست
☐	☐
☐	☐
☐	☐

۱. تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر n! است.

۲. تعداد راه‌هایی که بتوان از ۳ نوع بستنی و ۴ نوع آب‌میوه یک نوع را انتخاب کرد ۱۲ حالت است.

۳. تساوی $\frac{8!}{2!} = 4!$ همواره برقرار است.

(ب) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۴. اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و نتوان دو عمل را با هم انجام داد، آنگاه به طریق می‌توان عمل اول یا عمل دوم را انجام داد.

۵. حاصل عبارت $P(3, 3)$ برابر است.

۶. مقدار $0! \times (1! + 4!)$ برابر است.

(ج) گزینه درست را با علامت ✓ مشخص کنید.

۷. حروف کلمه severe را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که eها یکی در میان باشند؟

۱۸ (۱) ۲۴ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴)

(د) به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

* ۸. در یک لباس فروشی ۳ نوع کت و ۴ نوع شلوار وجود دارد. این کار به چند طریق امکان دارد: [هرمزگان - نمونه دولتی عترة - دی ۱۴۰۰ / ۲ بار تکرار]

(الف) اگر بخواهیم فقط یک نوع (کت یا شلوار) بخریم.

(ب) اگر بخواهیم هم کت و هم شلوار بخریم.

(ج) در حالت اول از اصل و در حالت دوم از اصل استفاده می‌کنیم.

۹. حاصل هریک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

(الف) $3! + 4!$ [تهران - مدرسه ماندگار البرز - دی ۱۴۰۰] (ب) $\frac{7! \times 1!}{2! \times 5! \times 0!}$

(ج) $0! + 1! + 5!$ (د) $\frac{8! \times 5!}{2! \times 7!}$

۱۰. با حروف کلمه (داریوش) بدون تکرار حروف (با معنی یا بی‌معنی)

(الف) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

(ب) چند کلمه ۳ حرفی که به (د) ختم شود می‌توان نوشت؟

(ج) چند کلمه ۴ حرفی که با (و) شروع و به (ش) ختم شود می‌توان نوشت؟

(د) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که حروف (ی، ش) کنار هم باشند.

۱۱. ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر است با n!.

۱۲. در یک آزمون تستی با ۱۰ تست چهارگزینه‌ای به چند طریق می‌توان به همه سؤالات پاسخ داد؟

۱۳. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد پنج رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱۴. با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد چهار رقمی کوچک‌تر از ۳۰۰۰ با ارقام متمایز می‌توان ساخت؟

[زندان - مدرسه دفترانه سما - دی ۹۹]

[فراسان رضوی - نمونه دولتی اسلامی - فروردین ۱۴۰۰]

۱۵. در یک کیسه ۵ مهره سبز، ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز وجود دارد. به چند طریق می‌توان ۳ مهره انتخاب کرد، به طوری که هر ۳ مهره یک رنگ باشند؟

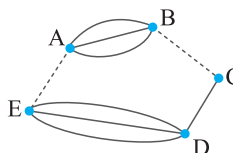
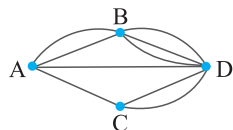
[قم - نمونه دولتی معدیه - دی ۱۴۰۰ - با انرکی تغییر]

[تهران - نمونه دولتی اومری - دی ۱۴۰۰]

۱۶. با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ و بدون تکرار رقم‌ها چند عدد ۴ رقمی بخش پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟

[تهران - نمونه دولتی اومری - دی ۱۴۰۰]

۱۷. الف) در شکل زیر به چند روش می‌توان از شهر A به شهر D سفر کرد؟ در چند مورد از شهر C عبور نمی‌کنیم؟
 ب) به چند طریق می‌توان از شهر A و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟ (همه راه‌ها دو طرفه‌اند).
 ج) تعداد راه‌ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۷ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



۱۸. تساوی $P(n-1, 2) = C(n, 3)$ برقرار است. مقدار $C(n, 6)$ را به دست آورید.

سوال تمرین	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
کدمفاهیم کلیدی	۵۱	۴۹	۵۰	۴۹	۵۲	۵۰	۵۱	۴۹	۵۰	۵۱	۵۱	۴۹	۵۱	۴۹	۵۱	۴۹	۴۹	۵۱

درس دوم: احتمال



[حد اکثر زمان مطالعه: ۱۸۰ دقیقه] - زمان شما:

مفاهیم آموزشی

آزمایش تصادفی و فضای نمونه

آزمایش تصادفی

به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست پدیده یا **آزمایش تصادفی** می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. مثلاً وقتی سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم، می‌دانیم دو حالت دارد، یا رو یا پشت می‌آید، ولی نمی‌دانیم کدام حالت اتفاق می‌افتد.

سوال + ۵۴

الف) ماندگاری بنزین داخل ظرف در باز در هوای آزاد

ب) انتخاب شماره یکی از دانش‌آموزان در یک کلاس ۲۰ نفره توسط معلم

ج) انتخاب ۱۰ نفر از بین ۱۰۰ دانش‌آموز، برای شرکت در مسابقات دومیادانی استانی با توجه به رکوردهای دانش‌آموزان.

پاسخ الف) آزمایش تصادفی نیست. چون نتیجه مشخص است بنزین در هوای آزاد تبخیر می‌شود.

ب) پدیده تصادفی است. چون مشخص نیست چه شماره‌ای انتخاب خواهد شد.

ج) پدیده تصادفی نیست. چون رکوردها و امتیازات مشخص است.

برآمد: به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، **برآمد** می‌گویند.

سوال در آزمایش پرتاب یک تاس با ۶ وجه برآمدها را مشخص کنید.

پاسخ در پرتاب یک تاس هر کدام از اعداد ۱ تا ۶ ممکن است ظاهر شود، پس ۶ برآمد دارد.

آزمایش‌های قطعی: به آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش‌ها یا **پدیده‌های قطعی** می‌گویند. مثلاً پدیده سوختن کاغذی که داخل آتش افتاده باشد یا پدیده خیس شدن سنگی که داخل آب افتاده باشد.

سوال

الف) بررسی نتایج بازی‌های یک تیم والیبال قبل از بازی

ب) وجود دانش‌آموزی در کلاس دوازدهم که سن او بیشتر از ده سال باشد.

ج) آمدن عدد ۶ در پرتاب یک تاس.

پاسخ الف) پدیده تصادفی، چون قبل از بازی‌ها به طور قطع نمی‌توان گفت چه نتایجی به دست می‌آید.

ب) پدیده قطعی، چون همه دانش‌آموزان کلاس دوازدهم سن بالاتر از ده سال دارند.

ج) پدیده تصادفی، چون قبل از پرتاب مشخص نیست که عدد ۶ رو می‌شود یا نه.

مفاهیم کلیدی

۵۴

پاسخنامه

۱) [۵۱] درست

۲) [۴۹] نادرست؛ با توجه به اصل جمع: $3 + 4 = 12$

۳) [۵۰] نادرست $\frac{8!}{2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2} = 20160$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

۴) [۴۹] $m + n$

۵) [۵۲] $P(3,3) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{1} = 3! = 6$

۶) [۵۰] $1! = 1, 0! = 1$

$(4! + 1!) \times 0! = ((4 \times 3 \times 2 \times 1) + (1)) \times 1 = 25 \times 1 = 25$

۷) [۵۱] گزینه «۳»

با استفاده از خانه‌های خالی داریم:

طبق اصل ضرب $3 \times 2 \times 1 = 6$

با r یا s یا e

طبق اصل ضرب $3 \times 2 \times 1 = 6$

با r یا s

$\Rightarrow$ طبق اصل جمع $= 6 + 6 = 12$

۸) [۴۹] الف) در این حالت با توجه به اصل جمع خواهیم داشت:

تعداد حالات $= 4 + 3 = 7$

ب) در این حالت با توجه به اصل ضرب خواهیم داشت:

تعداد حالات $= 4 \times 3 = 12$

ج) اصل جمع - اصل ضرب

۹) [۵۰] الف) $4! + 3! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1) = 24 + 6 = 30$

ب) $\frac{7! \times 1!}{2! \times 5! \times 0!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1} = \frac{7 \times 3}{1} = 21$

ج) $0! + 1! + 5! = 1 + 1 + (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 2 + 120 = 122$

د) $\frac{8! \times 5!}{2! \times 7!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 480$

۱۰) [۵۱] کلمه (داریوش) شامل ۶ حرف است، پس:

الف) $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$

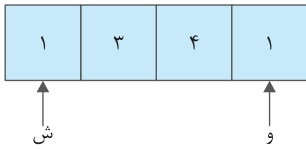
ب) کلمات ۳ حرفی که به حرف (د) ختم شود پس حرف آخر همواره (د) است.

حرف (د) $1 \times 4 \times 5 = 20$ تعداد کل حالات

ج) خانه‌های اول و آخر فقط با یک حالت پُر می‌شوند و خانه‌های وسط با حروف

باقی‌مانده بدون تکرار شدن پُر می‌شوند، یعنی:

$12 = 1 \times 3 \times 4 \times 1$ = تعداد کل حالات



د) حروف (ی، ش) را با هم یک حالت در نظر می‌گیریم، پس تعداد کل حروف ۵ تا می‌شود.

و چون جای ی و ش نیز می‌تواند با هم عوض شود پس:

$2 \times 12 = 24$ = تعداد کل

۱۱) [۵۱] اگر برای هر کدام از این اشیاء یک مکان در نظر بگیریم برای مکان اول n انتخاب و برای مکان دوم یک انتخاب کمتر یعنی $n-1$ انتخاب داریم و برای مکان سوم ۲ انتخاب کمتر یعنی $n-2$ انتخاب و این روند ادامه دارد تا مکان آخر که یک انتخاب داریم، پس:

مکان آخر ... مکان سوم مکان دوم مکان اول

بنابر اصل ضرب تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

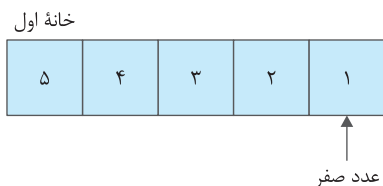
$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 = n!$

۱۲) [۴۹] به تست اول به ۴ حالت می‌توان پاسخ داد و به تست دوم به ۴ حالت می‌توان پاسخ داد. به همین صورت به تست دهم نیز به ۴ حالت می‌توان پاسخ داد. پس با توجه به اصل ضرب خواهیم داشت:

تست اول $4 \times 4 \times 4 \times \dots \times 4 = 4^{10}$

۱۳) [۵۱] و [۴۹] اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم.

حالت اول: ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند:



اصل ضرب $\rightarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

حالت دوم: ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند:



اصل ضرب $\rightarrow 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 192$

$120 + 192 = 312$ = تعداد ۵ رقمی‌های زوج

۱۴) [۴۹] و [۵۱] چون اعداد باید کوچک‌تر از ۳۰۰۰ باشد پس رقم سمت چپ فقط عدد ۱ یا ۲ می‌تواند قرار گیرد. بنابراین:

۱۹ [۵۴] نادرست؛ نتیجه پدیده‌های تصادفی قبل از اجرای آزمایش مشخص نیست.

۲۰ [۵۶] درست

۲۱ [۵۵] و [۵۶] درست

۲۲ [۵۷] نادرست؛ در تاس عدد بزرگ‌تر از ۶ نداریم، پس احتمال آمدن عدد بزرگ‌تر از ۶ غیرممکن و صفر است.

۲۳ [۵۴] نادرست؛ $12 = 6 \times 2 =$ فضای نمونه‌ای پرتاب تاس و سکه

۲۴ [۵۴] نادرست

۲۵ [۵۷] ۱

۲۶ [۵۴] برآمد

۲۷ [۵۶] ناسازگار

۲۸ [۵۵] ۳

۲۹ [۵۷] $\frac{3}{5}$

۳۰ [۵۶] $A \cap B$

۳۱ [۵۴] گزینه «۲»

۳۲ [۵۷] گزینه «۳»

$\{2, 3, 5\}$

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

روش اول: $n(S) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$ ؛ تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی زیرمجموعه ۳ عضوی شامل عدد یک:

$$A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 7\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 3, 8\}, \{1, 7, 8\}\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

روش دوم:

$$n(S) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10 \text{ و } n(A) = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{5}$$

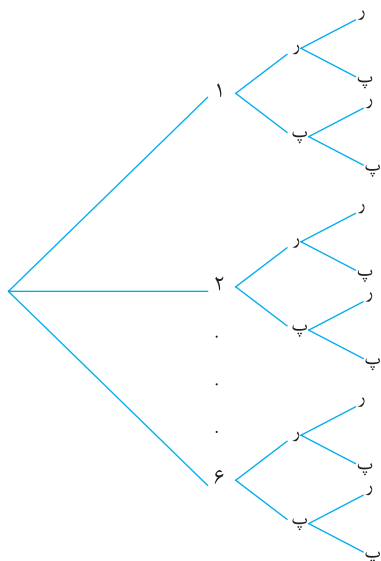
$$S = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$$

$$A = \{3, 9, 15, 21\} \quad B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$$

$$\text{الف)} \quad A - B = \{9, 15, 21\}$$

$$\text{ب)} \quad B - A = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$$

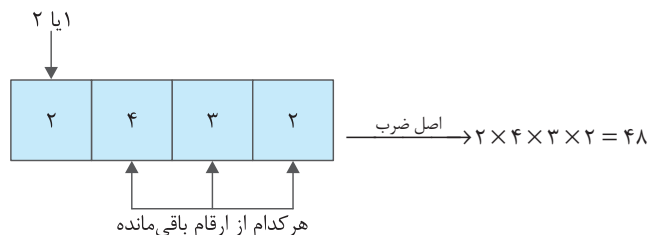
۳۳ [۵۵] و [۵۶] الف



$$n(S) = 6 \times 2 \times 2 = 24$$

$$\text{ب)} \quad A = \{((4, \text{ر}), (4, \text{پ}), (4, \text{ر}), (4, \text{پ}), (4, \text{ر}), (4, \text{پ}))\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$\text{ج)} \quad B = \{((1, \text{ر}), (2, \text{ر}), (3, \text{ر}), (4, \text{ر}), (5, \text{ر}), (6, \text{ر}), (1, \text{پ}), (2, \text{پ}), (3, \text{پ}), (4, \text{پ}), (5, \text{پ}), (6, \text{پ}))\} \Rightarrow n(B) = 6$$



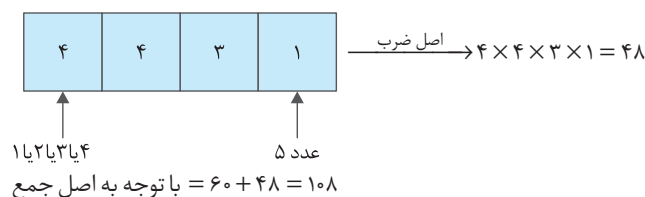
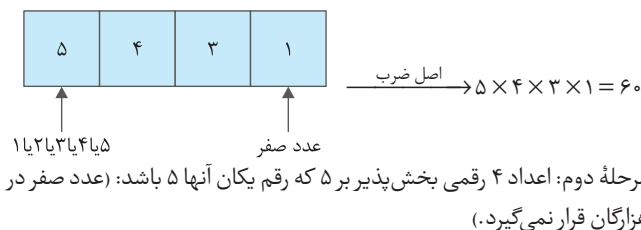
۱۵ [۵۳] قرار است هر ۳ مهره هم‌رنگ باشند، پس یا هر ۳ سبزی یا هر ۳ آبی یا هر ۳ قرمز هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$= \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} + \frac{4!}{3! \times 1!} + \frac{3!}{3! \times 0!} = 10 + 4 + 1 = 15$$

۱۶ [۴۹] و [۵۱] به خاطر وجود صفر و تأثیر آن بر یکان و هزارگان در دو مرحله

کار را انجام می‌دهیم:

مرحله اول: اعداد ۴ رقمی بخش‌پذیر بر ۵ که رقم یکان آنها صفر باشد:



۱۷ [۴۹] الف) مسیریایی که می‌توان طی کرد:

$$A \rightarrow B \rightarrow D \Rightarrow 2 \times 3 = 6 \text{ حالت}$$

$$A \rightarrow D \Rightarrow 1 \text{ حالت}$$

$$A \rightarrow C \rightarrow D \Rightarrow 1 \times 2 = 2 \text{ حالت}$$

طبق اصل جمع تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $6 + 1 + 2 = 9$

تعداد کل حالت‌ها بدون عبور از شهر C برابر است با: $9 - 2 = 7$

$$\text{ب)} \quad A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A$$

$$\Rightarrow 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 36$$

ج) فرض می‌کنیم تعداد راه‌ها از B به C برابر x و تعداد راه‌ها از A به E برابر با y باشد. بنابراین داریم:

$$D \text{ به } A \text{ سفر از شهر } D \text{ به } A = 3 \times x \times 1 + y \times 3 = 27 \Rightarrow 3x + 3y = 27$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۳}} x + y = 9$$

با عددگذاری جواب‌های ممکن را به دست می‌آوریم:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
y	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱

۱۸ [۵۲] و [۵۱] $P(n-1, 2) = C(n, 3)$

$$\frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)!}{3!(n-3)!} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{n}{3!} \Rightarrow 1 = \frac{n}{6} \Rightarrow n = 6$$

$$\Rightarrow C(6, 6) = \frac{6!}{6!(6-6)!} = \frac{6!}{6!} = 1$$